

صدقة من المؤلف الى سعادة العميد
زهني ناظر مدرسة الهندسة الحديثة

J. Labey

كتاب بلوغ الأكمال

في المنحنيات الكثيرة الاستعمال

تأليف

صاحبزاد افندي صبرى

مدرس فرع الوصفيات

بمدرسة الهندسة

الهندية

قد قرر مجلس المعارف الاعلان في جلسة ٢٥ ابريل سنة ١٢٨٨
لرؤم استعمال هذا الكتاب بالمدارس الاميرية
المصرية

لا يجوز لأحد طبع هذا الكتاب مطلقاً بدون اذن مؤلفه ومن
يتجاري على ذلك يجازى حسب القوانين

الطبعة الاولى

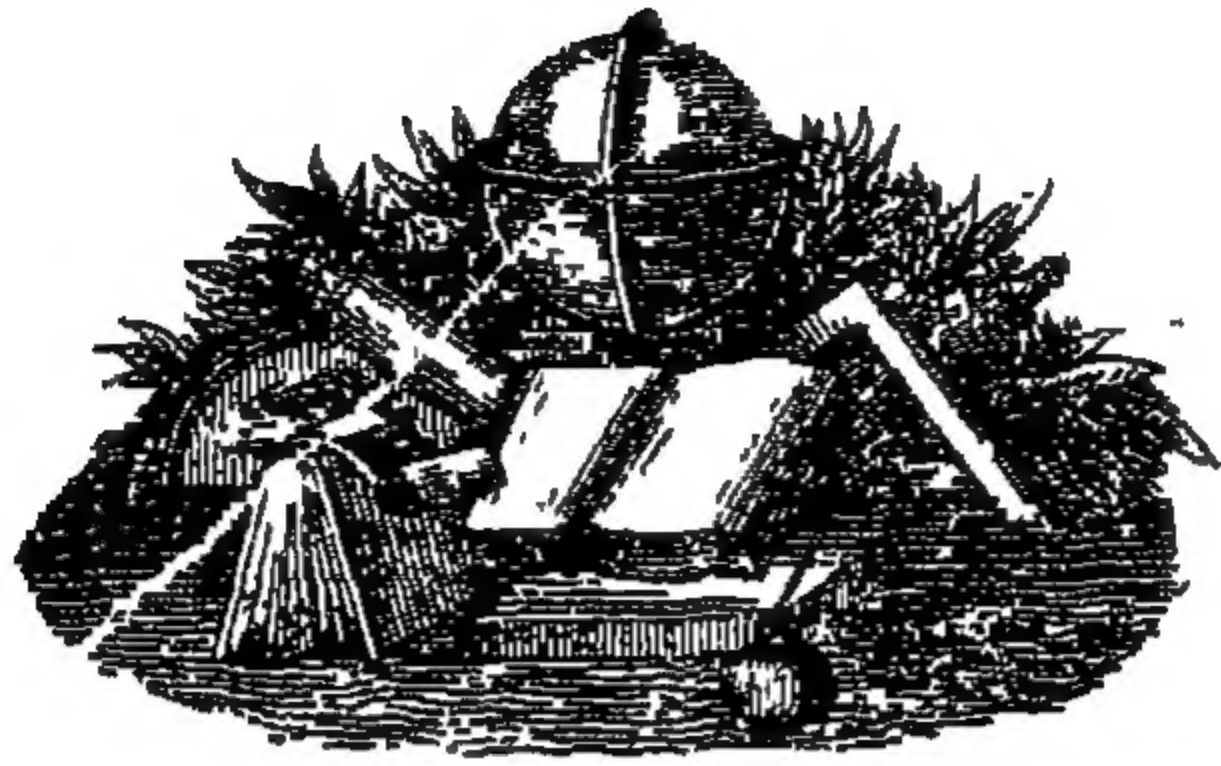
بمطبعة ديوان عموم المعارف بسراى درب الجمامين

سنة ١٢٩٩ هجرية

على صاحبها افضل الصلاة

وارزكى الخيرة

٣



بسم الله الرحمن الرحيم

حمدا لانها ثابا لمن بحكمته اهتدينا الى الطريق المعتدل القويم وشكرا دائما
 لمن خص النوع الانساني بالعقل ليعرف كنه قدرته ويستقيم فسيما انه من اله
 اتقن صنع العالم بعظيم قدرته اتقاننا ورتبه على ما اقتضته حكمته ترتيبا محكما
 لا يعرف قدره الا كل ذي بصيرة ممن ملا الله قلوبهم ايمانا فجعل الشمس والقمر
 والنجوم تجري في مداراتها المخفية بانتظام وكلفها بان تتبع في سيرها قوانين
 ثابتة قوية الاحكام لا الشمس ينبغي لها ان تدرك القمر ولا الليل سابق النهار وكل
 في فلك يسبحون وصلاة وسلاما مستقيمين متوازيين ممتدين لا يقطعها
 مدى الزمان قاطع فها غير منتهيين على مركز يحيط الدائرة الاسلامية مستط
 الوحى ومهبط الرسالة الربانية سيدنا محمد القاطع بسيف برهانه كل ما من يطعن
 لشيء من ايات تبليانه وعلى اله واصحابه المساعدين له على تأييد دعائم الدين
 واسقاط رويس اعدائه المشركين وبعيد فيقول الرابحى العفو عن كل ما يرمى
 عبده صابره صبرى مدرس علم الهندسة الوصفية وفروعه التطبيقية بمدرسة
 المهندسخانه الخديويه المصرية هذه رسالة ابتدائية في المنحنيات الكثرية الإستعمال
 قد كلفني مجملها من لا يسعني مقابلة امره الا بالامثال ذوالسيرة المضيئة والشهقة

التي

التي يعجز عن وصفها سبحان القاصح حضره العالم الشهير اسماعيل بك الفلكي
 ناظر مدرسة المهندسخانه والمساحه على شرط ان تكون سهلة العبارات والبراهين
 لا تتوقف اثباتاتها الا على الهندسة العادية وما في الجبر الواسع من القوانين
 ليتأتى استعمالها بمدرسة المساحه والمدارس التجهيزية وينتفع بها بنو الديار
 لمصر في ظل هذا الخديو الاعظم والداوري الاخف لازالت البلاد ممتعة ببقائه
 وأنجاله ولا زال محفوفاً بالنصر بجاه سيدنا محمد وآله ولما اشرفت على التمام
 وتحلت بحلية الختام سميتها بلوغ الامال في المنحنيات الكثيرة الاستعمال راجيا
 من المولى الغفور ان يقرنها بالقبول لدى الجمهور لنفوز برضاء اولياء الامور
 انه على كل شئ قدير وبالاجابة جدير وهذا وان الشروع في المقصود

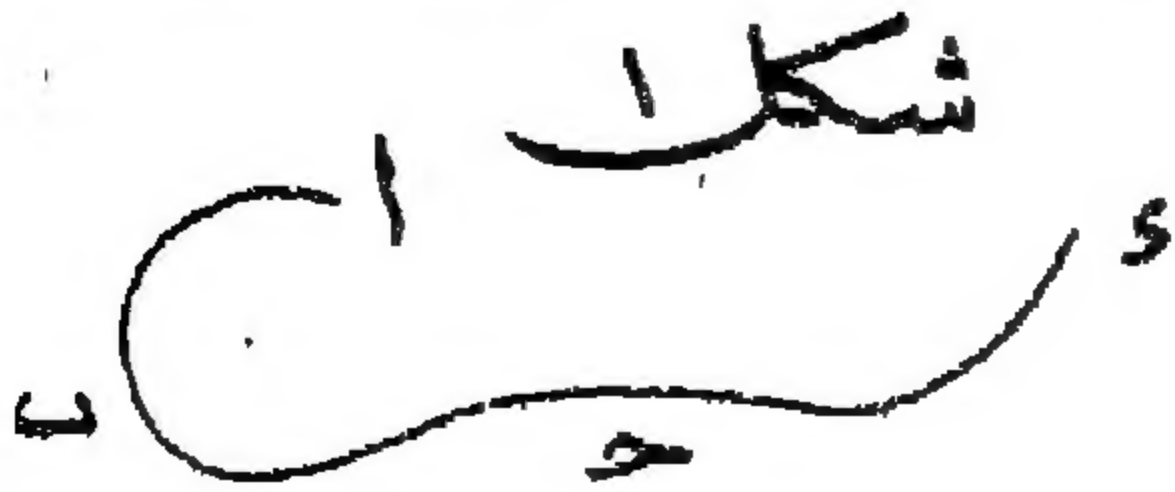
الباب الاول

في المقدمات وفيه فصول

الفصل الاول

في المبادئ والتعاريف الاولى

سند قد علم من الهندسة العادية ان كلمة خط كلمة عمومية تشمل الخط المستقيم
 والخط المنحني بجميع انواعه لان لفظة خط تطلق على المسار الهندسي لنقطة تتحرك
 في الفراغ بكيفية وشروط معلومة مهما كانت تلك الكيفية وهذه الشروط
 مثلا اذا تحركت نقطة في الفراغ واتجهت الى جهة معينة بشرط ان لا يتغير اتجاهها
 ابدا كان المسار الهندسي الذي يرسمه هذه النقطة خطا مستقيما
 واما اذا تحركت النقطة في الفراغ وتغير اتجاه سيرها في كل لحظة كان المسار الهندسي لها
 خطا منحنيا شكله وهيئته تابعان لكيفية وشروط حركة النقطة المذكورة
 سند فيعلم مما تقدم حينئذ ان المنحني هو
 الخط الحادث من تحرك نقطة هندسية
 بحيث يتغير اتجاه سيرها على الدوام

شكل


نقطه في مستوا واحد وذلك كما اذا التوى سلك رفيع من المعدن التواءً حيثما اتفق
بمحيث اذا وضع فوق السطح المستوي فلا يتكئ عليه الا بالبعض من نقطه حاله
كون معظم السلك خارجاً عن المستوي المذكور

سـد وتنقسم المنحنيات المستوية الى قسمين وهما المنحنيات المحدبة والمنحنيات الغير
محدبه فالمنحنى المحدب هو الذي لا يقطعه المستقيم في اكثر من نقطتين وذلك كحيط

الدائره مثلاً لانه مشبوت في الهندسه هـ
العادية ان المستقيم لا يقطعه الا في نقطتين
والمحنى ا ب ح د (شكل ٣) أيضاً

اذ ان المستقيم هـ هـ الموضوع حيثما اتفق لا يقطعه الا في نقطتي ب و ح لا غير
وأما المنحنى الغير محدب فهو الذي يقطعه

المستقيم في اكثر من نقطتين وذلك كالمنحنى هـ هـ
المبين في (شكل ٤) الذي يقطعه المستقيم

هـ هـ في النقط ب و ح د ع و الخ

سـد قطر المنحنى هو المستقيم المنصف لجميع أوتار ذلك المنحنى الموازية لاجتاه

معلوم وذلك كالقطر ب ت في المنحنى

ا ب آ (شكل ٥) لانه منصف للأوتار

ع أ ر هـ ر و و الخ الموازية

وموازية لاجتاه معلوم وهذا الاجتاه

يسمى الاجتاه المزوج للقطر ب ت

سـد وأما محور المنحنى فهو المستقيم المنصف للأوتار المتوازية التي اجتاهها مزوج

له حاله كونه عمودياً عليها وذلك كالمحور ا آ (شكل ٥) المنصف للأوتار

ع ز هـ ر الخ التي اجتاهها مزوج له وهو عمودى عليها

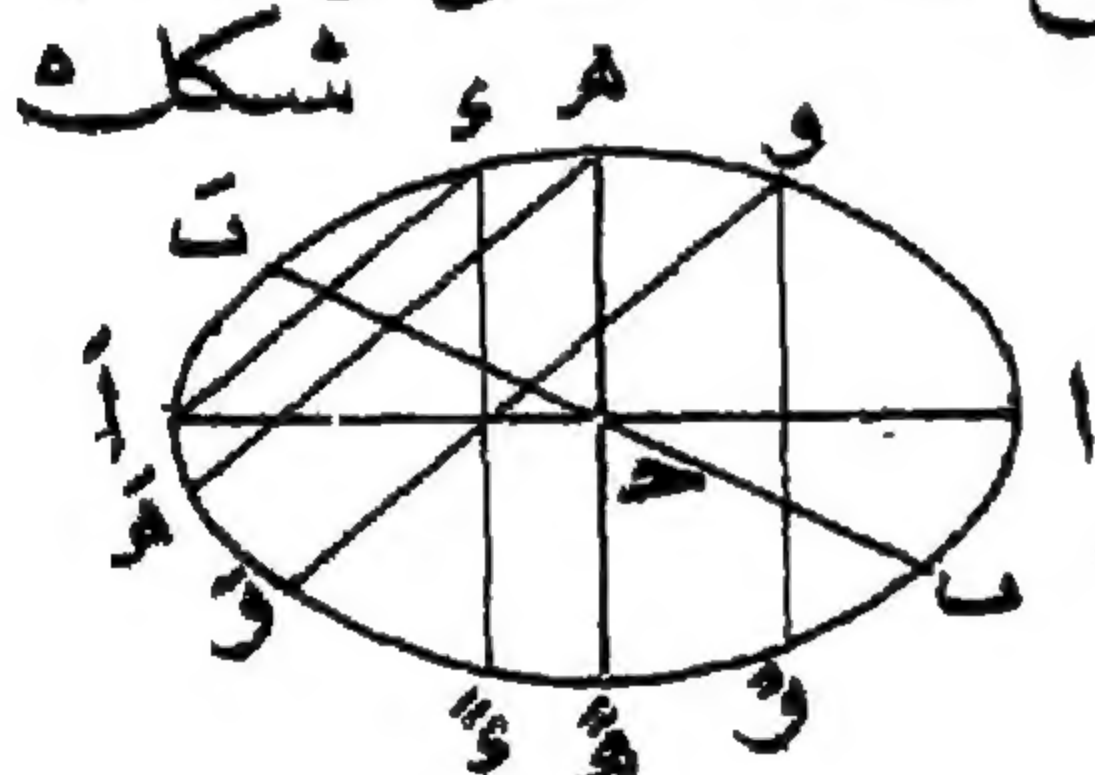
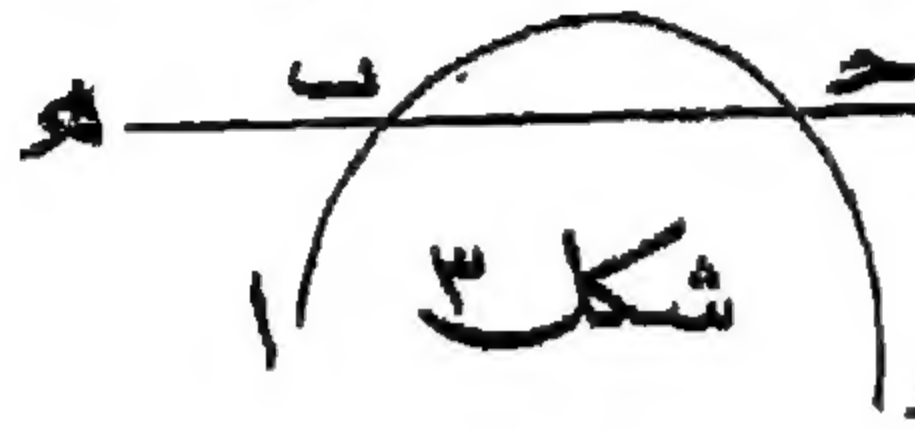
ويعلم من ذلك أن كل محور من محاور المنحنى قطره وليس كل قطر محوراً وان كل محور

من محاور المنحنى يقسمه الى قسمين متماثلين

وكذلك ينبج ما تقدم أن كل قطر من أقطار الدائرة محورها

سـد رأس المنحنى هو نقطة تقابل المنحنى بأي محور من محاوره فعلى ذلك تكون

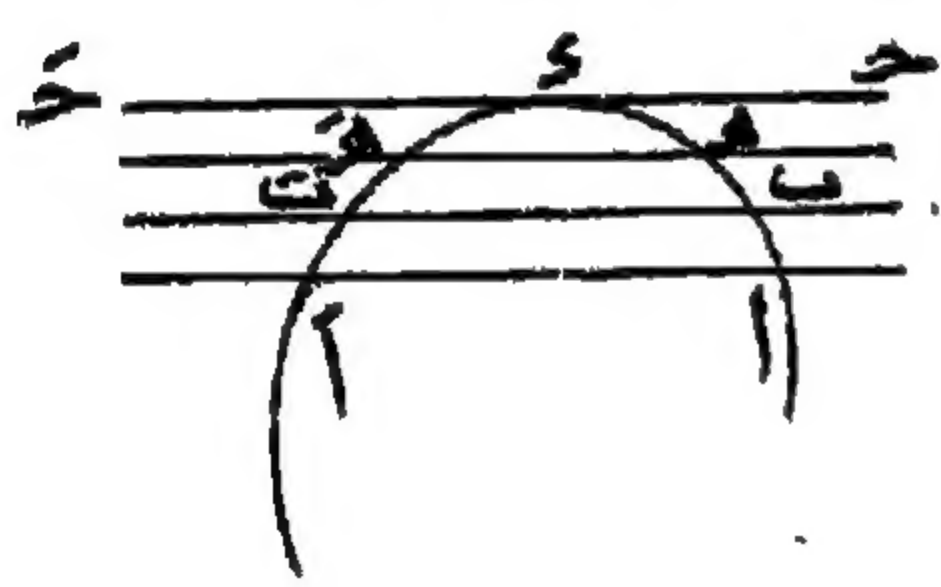
نقطتنا ١ ر أ (شكل ٥) رأسين من رؤس المنحنى ا ب آ وقد يكون للمنحنى



الواحد رأس واحدة أو اثنتان أو أكثر من ذلك
وحيث تقدم أن كل قطر من أقطار الدائرة يعتبر محوراً لها فكذلك تعتبر أي نقطة
من محيط الدائرة رأساً له (أي للمحيط) وبناء على ذلك يكون لمحيط الدائرة
رأس بقدر ما فيه من النقاط

سـ ٩ مركز المنحنى هو النقطة التي تكون جميع نقاط المنحنى متماثلة الوضع بالنسبة
لها بمعنى أن نقط المنحنى المذكور موضوعة متبني على مستقيمات مارة بنقطة المركز
ومتساوية البعد عنها فمركز المنحنى $أ ب$ (شكل ٥) مثلاً هو نقطة $ح$
وينتج من ذلك أن كل مستقيم مارة بمركز أي منحنى ومنتهى الطرفين بهذا المنحنى يكون
منصفاً بالمركز

ويفهم مما تقدم أن جميع أقطار المنحنى تمر بمركزه
سـ ١٠ مماس المنحنى هو الوضع النهائي الذي يأخذه أي قاطع من قواطع ذلك المنحنى
عند اتحاد نقطتين من نقط تقاطعه مع المنحنى ببعضهما وضيرورتها نقطة واحدة
مثلاً إذا فرض منحنى محذب كالمحنى $أ ب ع د$ (شكل ٦)



(شكل ٦) فكل مستقيم كالمستقيم $أ أ$ لا يقطعه
بمقتضى سـ ٩ إلا في نقطتين كنقطتي $أ$ و $أ$
فإذا توهمنا أن المستقيم $أ أ$ يتحرك بالتوازي
لنفسه أخذاً لأوضاع $أ أ$ $ب ب$ $ع ع$ $د د$ الخ

رأينا أن نقطتي تقاطع أوضاعه المتتالية تقربان من بعضهما شيئاً فشيئاً حتى إذا أخذ
المستقيم القاطع وضعاً نهائياً كالوضع $ح ح$ اتحدت نقطتا التقاطع وصارتا
نقطة واحدة كالنقطة $ع$ ففي هذا الوضع النهائي لا يقال للمستقيم $ح ح$ قاطع
للمنحنى بل يقال له مماس له في نقطة $ع$ التي يطلق عليها إذاً اسم نقطة التماس
هذا ولكونه مفروضاً أن المنحنى $أ ب ع د$ $هـ د$ $أ$ محذب فبالضرورة لا يكون
لأي قاطع كالقاطع $أ أ$ أو $ب ب$ أو $ع ع$ الخ نقط مشتركة بينه وبين ذلك
المنحنى سوى نقطتين اثنتين بحيث متى صار القاطع مماساً واتحدت نقطتا التقاطع
المذكورتان وصارتا نقطة واحدة ظهر أن المماس للمنحنى محذب لم يشترك معه إلا
في نقطة واحدة وهي نقطة التماس فقط وأن المنحنى يكون موجوداً بكامله في جهة
واحدة من التماس وهذه الخاصية لا توجد إلا في المنحنيات المحدبة فقط ويمكن

جعلها

جعلها تعريفا لها بأن يقال

المخني المحذب هو ما كان موجودا بأكماله في جهة واحدة من أي مماس فرض له
أما إذا كان المخني المعلوم منحيا غير محذب كالمخني المبين في (شكل ٧) بمعنى أن
القاطع له مشترك معه في أكثر من نقطتين
فانه عندما يصير هذا القاطع مماسا
للمخني المذكور تتحد نقطتان من نقط
التقاطع وتصبحان نقطة واحدة

شكل ٧



وأما نقط التقاطع الباقية فلا تتحد معها بالضرورة وبناء على ذلك يرى أنه قد يكون
المستقيم مماسا للمخني محذب في نقطة حاله كونه قاطعا له في نقطة أخرى وذلك
كالمستقيم أ أ فانه مماس للمخني في نقطة ب وقاطع له في نقط ح ز ر هـ
..... الخ

سألد إذا كان المخني ذا أقطار فيكون للمماس بعض خواص تسا عد على رسم ذلك
المماس وحينئذ يلزمنا ان نشرح هذه الخواص لنستعين بها عند لزومها فنقول

نظرية اول

المستقيم المماس لمخني من المنحنيات ذوات الأقطار يكون موازيا لجميع الأوتار
التي اتجاهاها مزاج للقطر المار بنقطة التماس

شكل ٨



ولاجل البرهنة على ذلك نفرض أن المستقيم
ب ا مثلا (شكل ٨) هو أحد أقطار
للمخني المعلوم س ب س وأن المستقيم
ح د هو الوتر المزاج لهذا القطر فمقتضى
ما تقدم يكون هذا الوتر منصفها بالقطر

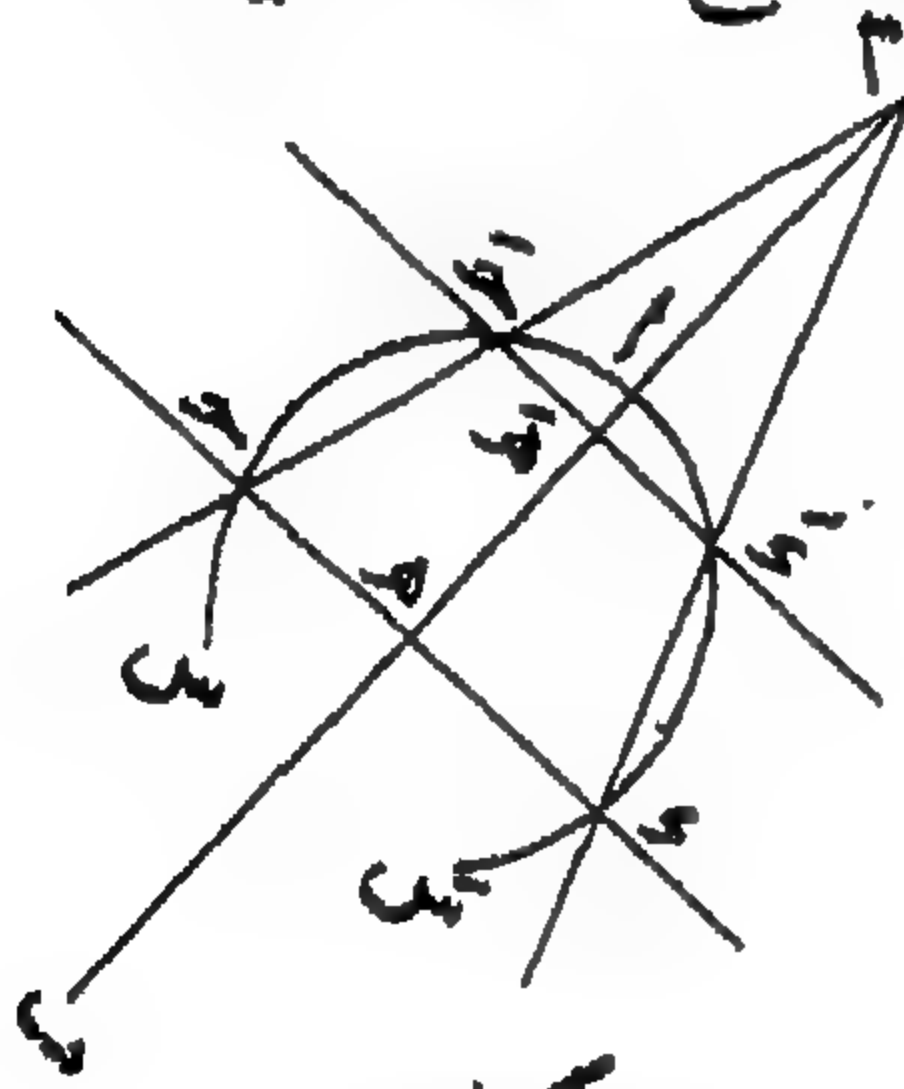
المذكور في نقطة مثل هـ فاذا حرك هذا الوتر بالتوازي لنفسه بشرط ان تقرب
نقطتا تقابله بالمخني من بعضهما شيئا فشيئا كانت بالضرورة نقطة تقابله بالقطر
منتصفا له منها أخذ من الأوضاع بمعنى أن النقطة هـ ر هـ ... الخ تكون
في أوساط الأوتار ح د ر ح د ... الخ

ومن ذلك يرى أنه عندما ياخذ الوتر المتحرك وضعه النهائي أعني عندما يتحد

نقطتا التقابل مع بعضهما يلزم أن تتحد معهما نقطة ه الموجودة دائما في منتصف ذلك الوتر المتحرك فتصير الثلاث نقط المذكورة نقطة واحدة ومن ذلك يرى أيضا أن نقطة التماس تكون هي نهاية القطر أعني نقطة ب وينتج من هذه النظرية أن المستقيم المماس لأي منحن في أحد رؤسها يكون عموديا على محور الماس بلك الرأس ولذا إن المماس لمحيط الدائرة في أي نقطة منه يكون عموديا على قطر المماس نقطة التماس

نظرية ثانية

سأد إذا وجد مستقيمان مما شان لمنحن معلوم فأقول ان الوتر الواصل بين نقطتي تماسهما يكون متواجا للقطر المار بنقطة تقاطع هذين المماسين



شكل ٩

ولأثبت ذلك نفرض أن مستقيمي ح د ر ح د وتران من أوتار المنحنى س اس (شكل ٩) وأن المستقيم اب هو قطر المزاوج لهما ثم نصل الوترين ح د ر ح د ونعدهما على استقامتهما حتى يتقاطعا في نقطة ولنكن م مثلا فأقول ان نقطة م يلزم أن تكون موجودة على امتداد القطر ب ا لأن

نسبة ح د : ح د :: ح د : ح د

وحيث ان هذه الخاصية لا تزال توجد مهما قرب الوتران ح د ر ح د من بعضهما فتوجد أيضا في الحالة النهائية أعني عند اتحاد هذين المستقيمين مع بعضهما وعند



شكل ١٠

ما يصير الوتران ح د ر ح د مما سين للمحنى المعلوم سأد العمودي على منحن من نقطة مفروضة عليه هو المستقيم المقام عموديا على مماس ذلك المنحنى من النقطة المفروضة

مثلا العمودي على منحنى س اس من نقطة ا هو العمود اء المقام من نقطة ا على المماس ب د هو للمنحنى المذكور في نقطة ا المذكور

ويؤخذ من هذا التعريف أولاً أن محاور أي منحنى هي العموديات عليه في نقط
رؤسه وثانياً أن جميع أنصاف أقطار الدائرة أعمدة على محيطها

الفصل الثاني

في طرق رسم المماس لمنحنى ما والعمودى عليه

سأذكر كثير من المنحنيات ما يكون لمماسه جملة خواص مخصوصة به ولا توجد
في غيره منها تستنتج بعض طرق هندسية مضبوطة بها يمكن رسم المماس لهذا
المنحنى بالسهولة وذلك كما لا ترق مثلاً فإن لمماسها خاصية معلومة وهي كونه عمودياً
على نصف القطر المار بنقطة التماس فبواسطة هذه الخاصية وجدت سهولة عظيمة
في كيفية رسم المماس لمحيط الدائرة
وخلاف ذلك توجد أيضاً عدة منحنيات لمماسها خواص مختلفة نذكرها عند الكلام
على كل نوع من هذه المنحنيات في محله
لكن أغلب المنحنيات ليس لمماسها خواص تسا عد على رسمه فيمنظر على رسمه بطريقة
تقريبية

سأذكر ولنشرح حينئذ الطرق اللازم سلوكها في رسم المستقيم المماس لمنحنى معلوم
حيثما اتفق مجهول الخواص بالكلية فنقول
إن رسم المماس لمنحنى ما يستلزم على ثلاث مسائل أصلية نذكرها على الترتيب وهي
(المسألة الأولى) أن يكون المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحنى ما من نقطة من موضعه
عليه

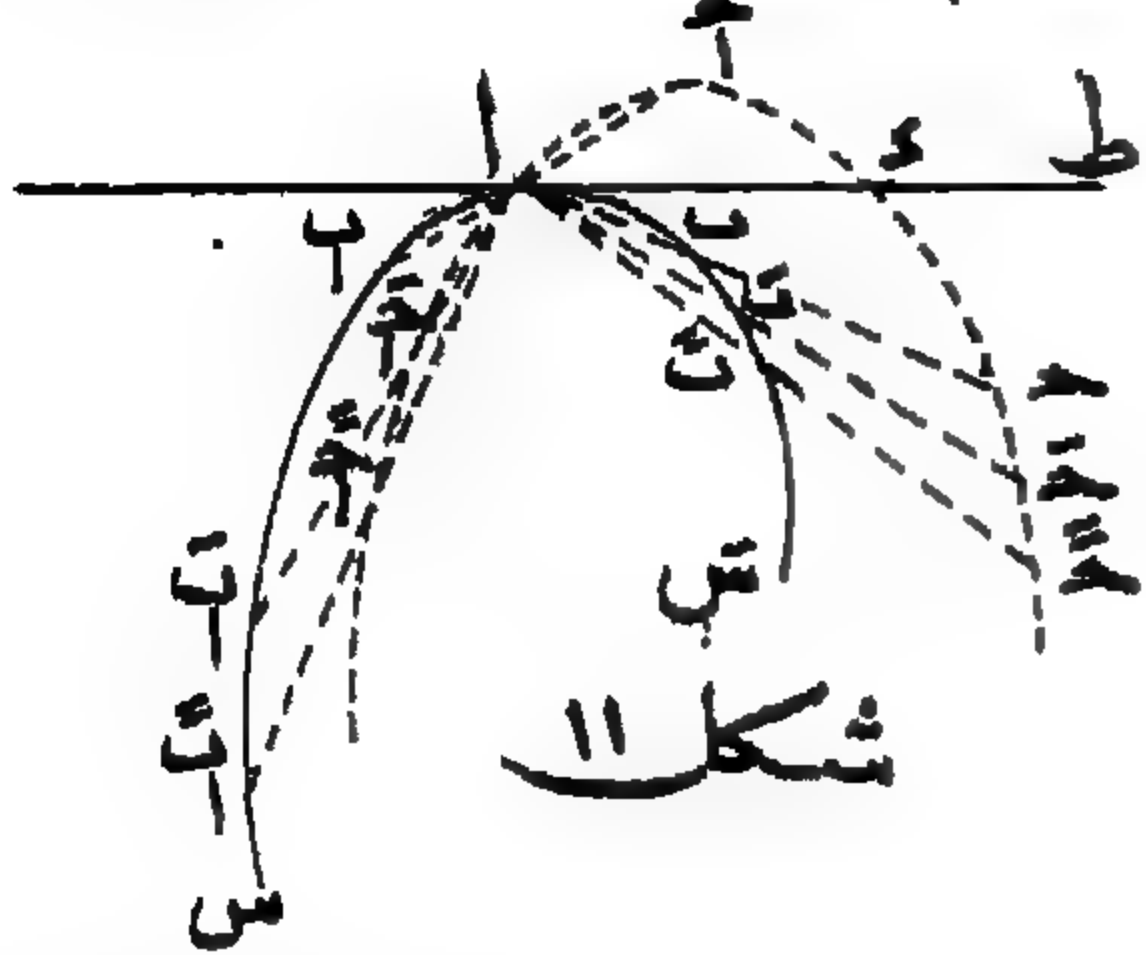
(المسألة الثانية) أن يكون المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحنى معلوم ومماس
بنقطة خارجة عنه

(المسألة الثالثة) أن يكون المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحنى معلوم ومماس
لمستقيم معلوم أيضاً

ولنورد لك حل هذه المسائل الثلاث على الترتيب ثم نذكر
بعد حلها حل المسائل المناظرة لها في كيفية رسم العمودى
على منحنى معلوم فنقول

المسألة الأولى

مطلوب إذا كان المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحن معلوم من نقطة مفروضة عليه تستعمل



الطريقة المعروفة بطريقة المنحنى المساعد وهي أن يفرض أن المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحن كالمنحنى س اس من نقطة المفروضة عليه كما في (شكل ١١)

ولذلك تمد من نقطة التماس وهي ا جملة مستقيمت قاطعة للمنحنى بالمستقيمت

اب ر ات ر ات الخ و اب ر اب ر اب ر الخ وهذه القواطع تقطع المنحنى المعلوم في نقط مثل نقط ب ر ت ر ت الخ و ب ر ب ر ب ر الخ بعضها في احدى جهتي نقطة التماس والبعض الاخر في جهتها الثانية ثم يؤخذ على هذه القواطع بالابتداء من النقط المذكورة جملة ابعاد متساوية طول الواحد منها اختياري كالابعاد ب ح ر ت ح ر ... الخ و ب ح ر ب ح ر ... الخ مع الاعتناء بأخذ هذه الابعاد على امتداد القواطع في احدى جهتي نقطة التماس وعلى نفس القواطع في الجهة الثانية منها ثم تجمع نقط نهايات الابعاد المقطوعة بخط متصل فيحدث منحن جديد يكون مارا بالضرورة بنقطة التماس وهي ا وذلك لأنه يوجد من ضمن القواطع التي في الجهة اليمنى قاطع يكون وتره المحصور داخل المنحنى الجديد مساويا بالضبط الى البعد ب ح

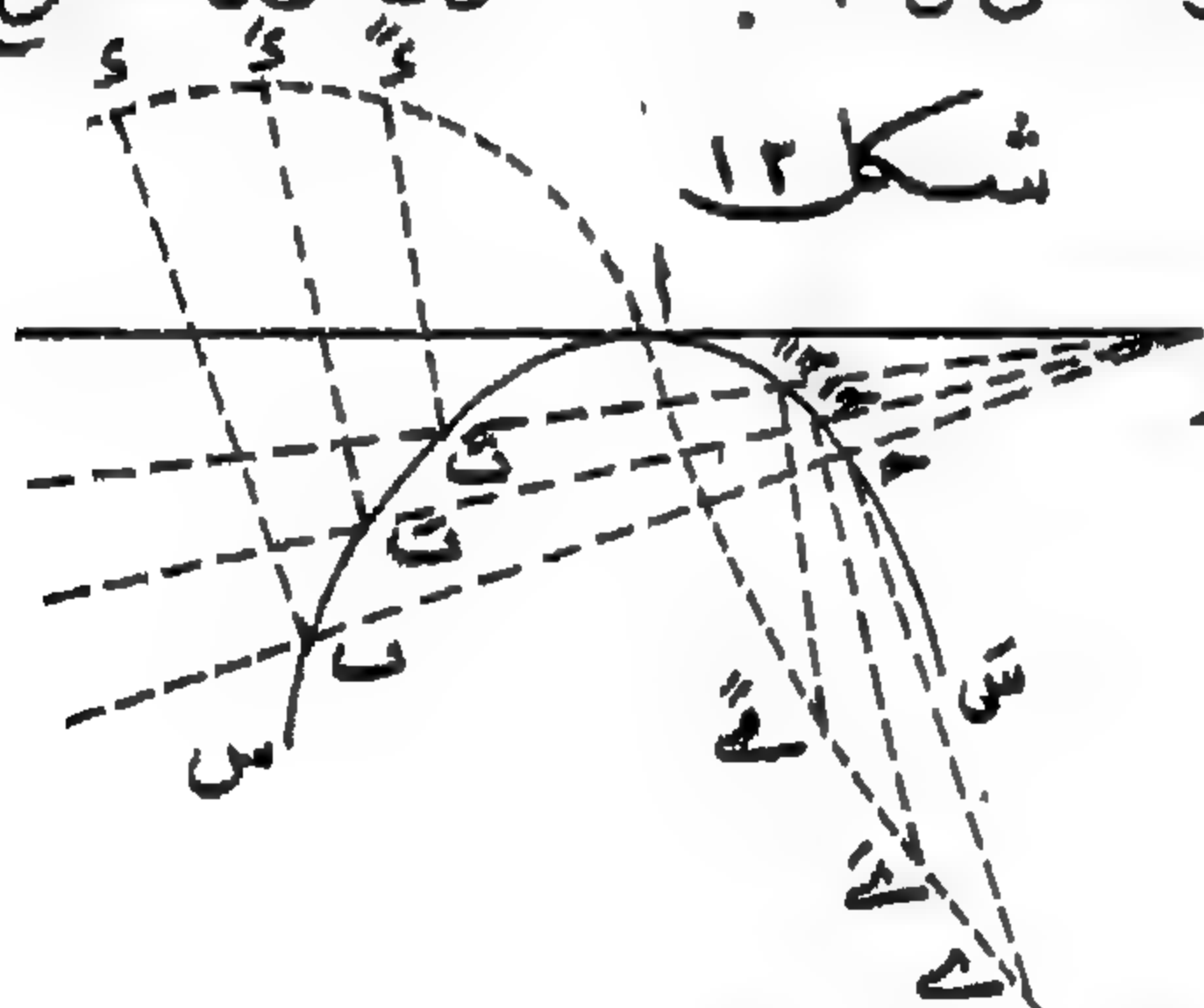
ويعلم من ذلك انه اذا فرض أن التماس ا ط معلوم وأخذ عليه بالابتداء من نقطة التماس بعد مساوي الى ب ح كالبعد ا ح كانت نهاية هذا البعد نقطة من نقط المنحنى المساعد وحينئذ بالعكس اذا جعلت نقطة التماس ا مركزا وبعده مساويا الى ب ح يرسم قوس دائرة فيقطع المنحنى المساعد في نقطة تكون هي احدى نقط التماس المطلوب

ويشاهد ما تقدم انه بدل رسم المنحنى المساعد بأكماله يكتفى فقط برسم الجزء المجاور لنقطة و وأنه لأجل الضبط في إيجاد التماس يؤخذ الطول الاختياري ب ح طويلا طويلا كافيا وملائما

المسألة الثانية

٧٤ المثلث المطلوب رسم مستقيم مما س لمنحن معلوم وما نقطة خارجة عنه
يمكن حل هذه المسئلة بواسطة المسطرة فقط بان يجعل احد المسطرة مارة بالنقطة
المعلومة ومما س هذا المنحنى لكن هذه الطريقة غير كافية لضبط اتجاه المماس ولا لتعيين
نقطة التماس بالضبط ويتوصل الى تعيين المماس ونقطة تماسه بالضبط بواسطة
الطريقة الآتية المسماة ايضا بطريقة المنحنى المساعد

مثلاً ليكن س ١ س (شكل ١٢) هو المخني المعلوم ولتكن نقطة ه هي النقطة التي يراد إمرار المماس بها فنم من نقطة ه قاطعاً كالمقاطع ه ب متباعدان وضع المماس من بعد قليل ثم يقام عليه من نقطتي ب ر ح في اتجاهين متضادين عمودان مثل ب د ر ح ع ويؤخذ على كل منها بعد مساو إلى الوتر المقطوع



ب ح ثم يامنها قاطع آخر
ونجزي عليه العمية بعينها

وهكذا تؤخذ جملة قواطع كافية
لتحصيل عدة نقط مثل $\epsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha$
و $\epsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha$ الخ متقاربة
من بعضها قريبا كافيا ويجمع هذه
النقط بخط متصل فيحدث منحن

يكون بالضرورة ما را نقطة التماس المطلوبة لأنه متى صار القاطع مما سا يصير الوتر
المقطع ب ح مساويا للصفري ويصير كل من العمودين ب د و ح م معلوما
تدبسيه يمكن اخذ الاعمة ب د و ح مساوية لضعف البعد ب ح
أو الى ثلاثة أمثاله أو نحو وتعويض الاعمة المذكورة بمستقيمات متوازية مشى
اجتاهها اختياري لكن بشرط أن تكون الزوايا ه ب د و ه ب د و ر الخ
متساوية دائما

المسألة الثالثة

٨٠
سؤال المطلوب رسم مستقيم مما س نلخص وموازي لاجتاه معلوم
قد تمكن ايضا حل هذه المسئلة بواسطة المسطر بان تحرك بالتوازي لاجتاه

المعلوم حتى يصير حدها مماسا للمحنى إلا أنه بهذه الطريقة لا يمكن تعيين نقطة التماس بالضبط الكافي فلاجل تعيينها نجري عليها العمل كما أجرنا به على المسئلة الثانية بأن نمد جملة قواطع موازية الى الاتجاه المعلوم ويقام من نهايتها كل قاطع منها مستقيمان مختلفا الاتجاه وعموديان عليه وتؤخذ عليهما ابعاد مساوية للوتران المقطوع وتتم العملية كما تقدم (انظر تنبيه المسئلة الثانية)

في كيفية رسم العمودى على منحنى

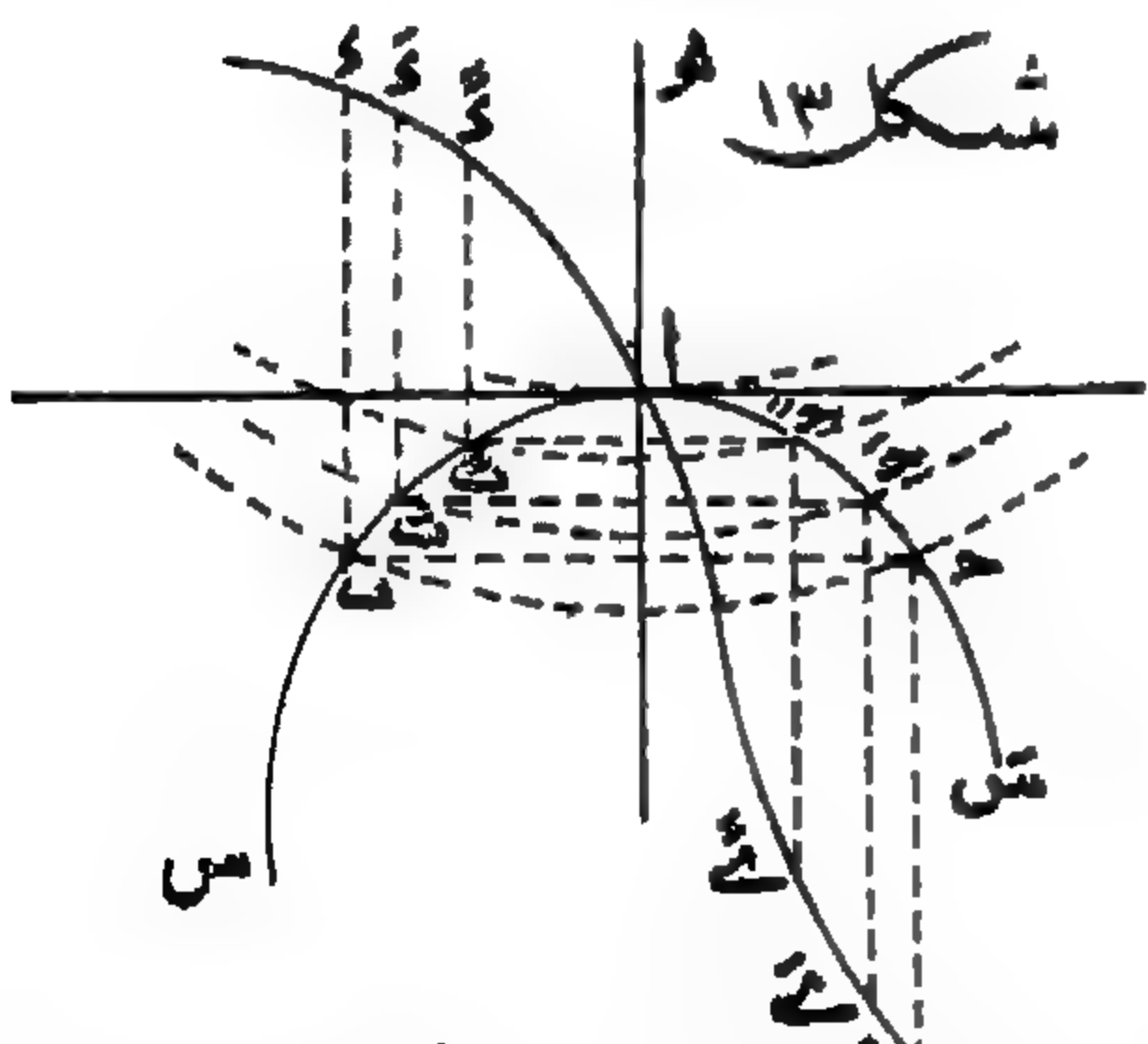
سند يشتمل البحث عن المستقيم العمودى على منحنى على ثلاث مسائل أصلية كالبحث عن مماس هذا المنحنى

المسئلة الاولى

ان يكون المطلوب تعيين المستقيم العمودى على منحنى من نقطة مفروضة عليه وحل هذه المسئلة نبحث بمقتضى ما تقدم عن المماس لهذا المنحنى في النقطة المعلومه ويقام من نقطة التماس عمود عليه فيكون هو المستقيم العمودى على المنحنى

المسئلة الثانية

سند المطلوب ايجاد المستقيم العمودى على منحنى من نقطة خارجة عنه



مثلا ليكن س ا س (شكل ١٣) هو المنحنى المعلوم ونقطة هـ هي النقطة التى يراد من المستقيم العمودى على المنحنى منها

فنفرض أن المسئلة محاولة وأن هـ هو العمودى المطلوب ونقول من المعلوم انه اذا جعلت نقطة هـ مركزا

وسعد مساويا الى هـ ا رسم محيط دائرة كانت هذه الدائرة مماسة للمنحنى المعلوم حيث ان العمودى على كل منها في نقطة التماس واحد ولاجل تعيين نقطة ا تجعل نقطة هـ مركزا وترسم جملة اقواس متحدية المركز قاطعة للمنحنى المعلوم

في نقطتي ب ح و ك ر ح ر ح ثم يقام من نهايتي كل وتر من الأوتار
ب ح ر ح ر ح ر ح في اتجاهين متضادين مستقيمان عموديان عليه
ويؤخذ على كل منهما بعد مساو له كما تقدم ويجمع النقط ع ر ح ر ح ر ح ر ح
بخط متصل فيحدث منحن يكون بالضرورة مارا بنقطة ا وبه تتعين هذه
النقطة بغاية الضبط كلما كثرت النقط وقربت من بعضها

المسئلة الثالثة

ساعد المطلوب مد مستقيم عمودي على منحن ومواز لمستقيم معلوم
يكفي لحل هذه المسئلة رسم مستقيم مماس للمحن وعمودي على الاتجاه المعلوم
ثم تعين نقطة تماسه بمقتضى ما تقدم ويقام منها مستقيم عمودي عليه فيكون
هو العمودي المطلوب

الفصل الثالث

في تقدير أطوال المنحنيات ومساحة الاشكال المنحنية

أكد كثير من المنحنيات ما يمكن تعيين طوله بالضبط والسهولة سواء كان
بالطريقة الحسابية أو بالطريقة الرسومية وذلك كالدائرة والقطع الناقص وغيرها
ما سنده في محله لكن في أغلب الأحوال لا يمكن تقدير طول المنحنيات إلا بالطريقة
التقريبية

وهي أن يرسم داخل القوس أو المنحنى الذي يراد تقدير طوله خط كثير الأضلاع
أضلاعه صغيرة جدا على قدر الإمكان ثم يقاس طول هذا الخط فيكون طوله عين
طول المنحنى الأصلي تقريبا

وإذا اريد إيجاد طول القوس بغاية التقريب يرسم عليه خط كثير الأضلاع آخر
أضلاعه صغيرة جدا ومماسة لهذا المنحنى فيكون طول هذا الخط أكبر من طول المنحنى
وطول الخط الأول أصغر منه وحينئذ إذا أخذنا المتوسط بين الطولين كان
هو طول المنحنى مقربا إلى الحقيقة جدا

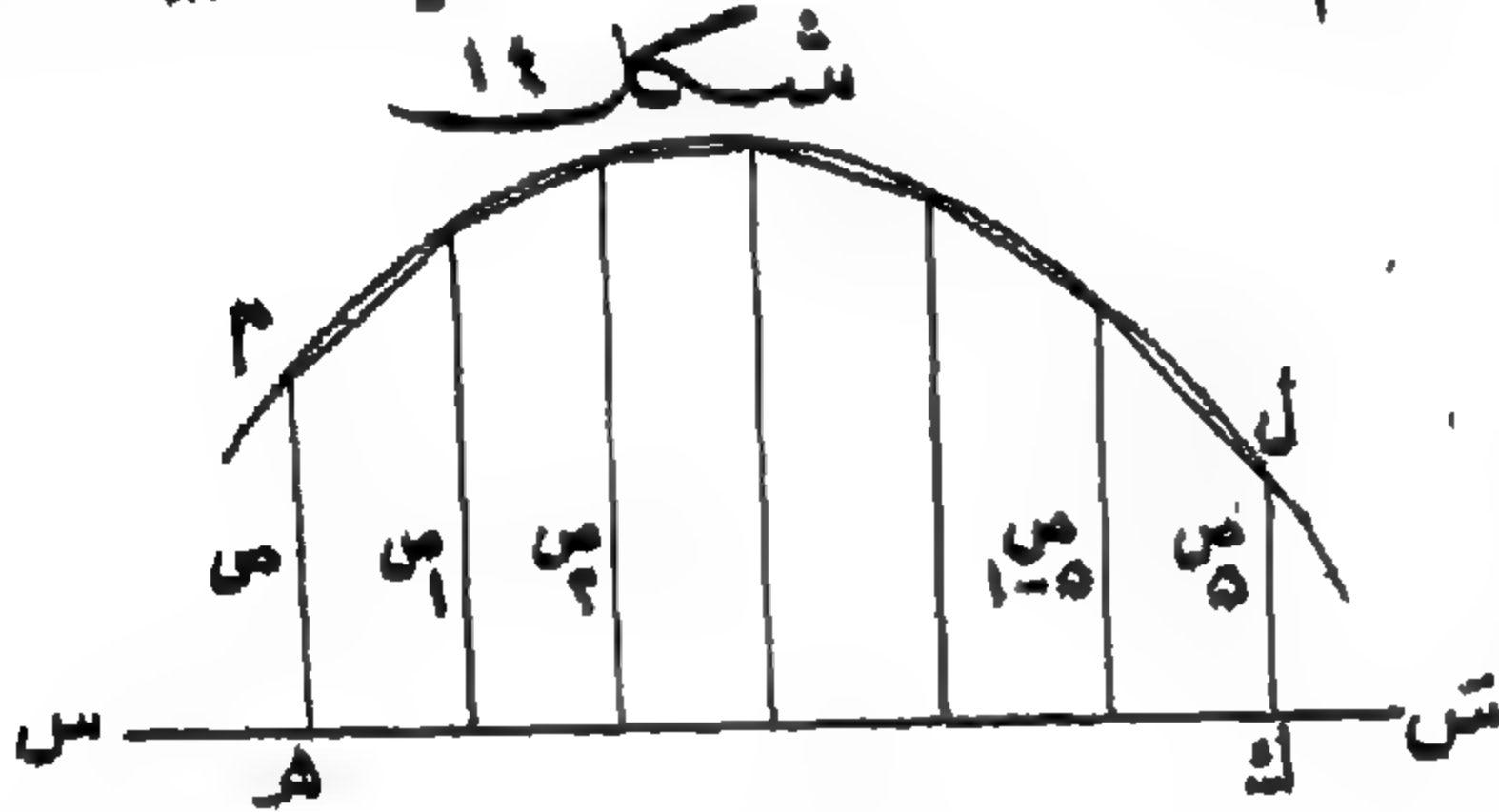
أما إذا كان المنحنى الذي يراد قياس طوله موجودا على سطح جسم صلب فيكتفي
بأن يلف عليه شريط لين قابل للالتفاف عليه كما إذا اريد معرفة طول محيط جذع

شجرة مثلاً ومع ذلك فإن هذه الطريقة لا تستعمل إلا في الأعمال التقريبية لأنها لا تعطي الطول الحقيقي حيث أنه بكثرة شد الشريط أو قلته يزيد الطول أو ينقص

في تقدير مساحة الأشكال المنحنية

٣٢٤ الأشكال المستوية المحدودة بخطوط منحنية غير منتظمة الانحناء لا يمكن تعيين مساحتها بطرق بسيطة مضبوطة بل يلزم الاستعانة على تعيين مساحتها بطرق تقريبية نذكرها فنقول

(طريقة أشباه المنحرف) لنفرض أن المراد معرفة مساحة الشكل المتكون من جزء منحن مثل م ل (شكل ١٤) ومن مستقيم مثل س س ومن العمودين المنزولين من م إلى المنحنى على هذا المستقيم



ولذلك تقسم المسافة ك ه إلى جملة أقسام متساوية عدد ه بحيث يتفق بمنزلة كل منها بحرف ع ثم يقام من نقط التقاسيم أعمد على المستقيم

س س فهذه الأعمد للسماء بالاحداثيات الرأسية تقسم الشكل المعلوم إلى جملة أشباه منحرفات صغيرة وقائمة الزوايا في كل منها ضلع واحد منحن لكنه يكون صغير جداً حينما تقسم المسافة هـ ك إلى جملة أقسام عدد هـ كاف لاعتبار ك مستقيم ثم تعتبر جميع هذه الأشباه منحرفات كأنها مستقيمة الأضلاع ويبحث عن مساحة كل منها على حدة ومجموع مساحات هذه الأشكال الجزئية يكون هو مساحة السطح الكلي التي يراد تعيينها وهذه المساحة تكون قريبة من المساحة الحقيقية كلما كانت ارتفاعات الأشباه منحرفات صغيرة جداً

ولنفرض أن ص ر ص ر ص ر ... هي أطوال الاحداثيات الرأسية المتتالية وأن ع ارتفاع مشترك لكل منها ونرمز بحرف س لمساحة الشكل الكلي فيكون

$$س = ع \left(\frac{ص_1 + ص_2}{2} + \frac{ص_2 + ص_3}{2} + \dots + \frac{ص_{n-1} + ص_n}{2} \right)$$

$$س = ع \left[\frac{ص_1 + ص_2}{2} + \frac{ص_2 + ص_3}{2} + \dots + \frac{ص_{n-1} + ص_n}{2} \right]$$

أو وعلى هذا تكون مساحة الشكل الكلي مساوية لحاصل ضرب المسافة بين كل احداثيتين متواليين

ويشاهد من ذلك أن للساحة المأخوذة بهذه الطريقة تكون أصغر من للساحة الحقيقية بقليل عندما يكون تقعر المنحنى موجهًا نحو المستقيم SS كما حصل ذلك في (شكل ٤) وفي الواقع لأن كل شبه منحرف منحنى الضلع استعوض عنه شبه منحرف مستقيم الأضلاع أصغر منه

وبالعكس تكون هذه المساحة أكبر من المساحة الحقيقية عندما يكون تمثيل
المختلج جهة المستقيم SS

وأما إذا كان المخفى للعلوم مشتملاً على جملة انقلابات كان بعض أشباه الخرف أكبر من مباحثه والبعض الآخر أصغر منه بحيث يحصل التقاؤل الجري بينهما

٢٢ في طريقة الميونيوم بونلي بونسلية اختراع طريقة بها يمكن الحصول
بغاية السرعة على مساحة أضبط من الأولى وغاية هذه الطريقة هي أن تقسم
المسافة هـ ك (شكل ١) الى عدد زوجي من الأقسام المتساوية مثل الأقسام

هـ | ا | ب | ج | د | هـ | ز | ح | ط | ي | م | ن | و | ك | ل | خ | ع | ف | ق | ك | ل | واحد منها بحرف ع

ثم تقام من جميع نقط التقاسيم احداثيات مثل a, b, c وانح وتوصل المستقيمات m, n, o وانح فتحصل كما تقدم جملة اشباه منحف مستقيمة

الاضلاع ارتفاع أولها وآخرها
هو البعد ع. وأما ارتفاع باقيا

فإنه منسأ إلى ع ثم تمسح
هذه الاشكال أي تؤخذ مساحطا

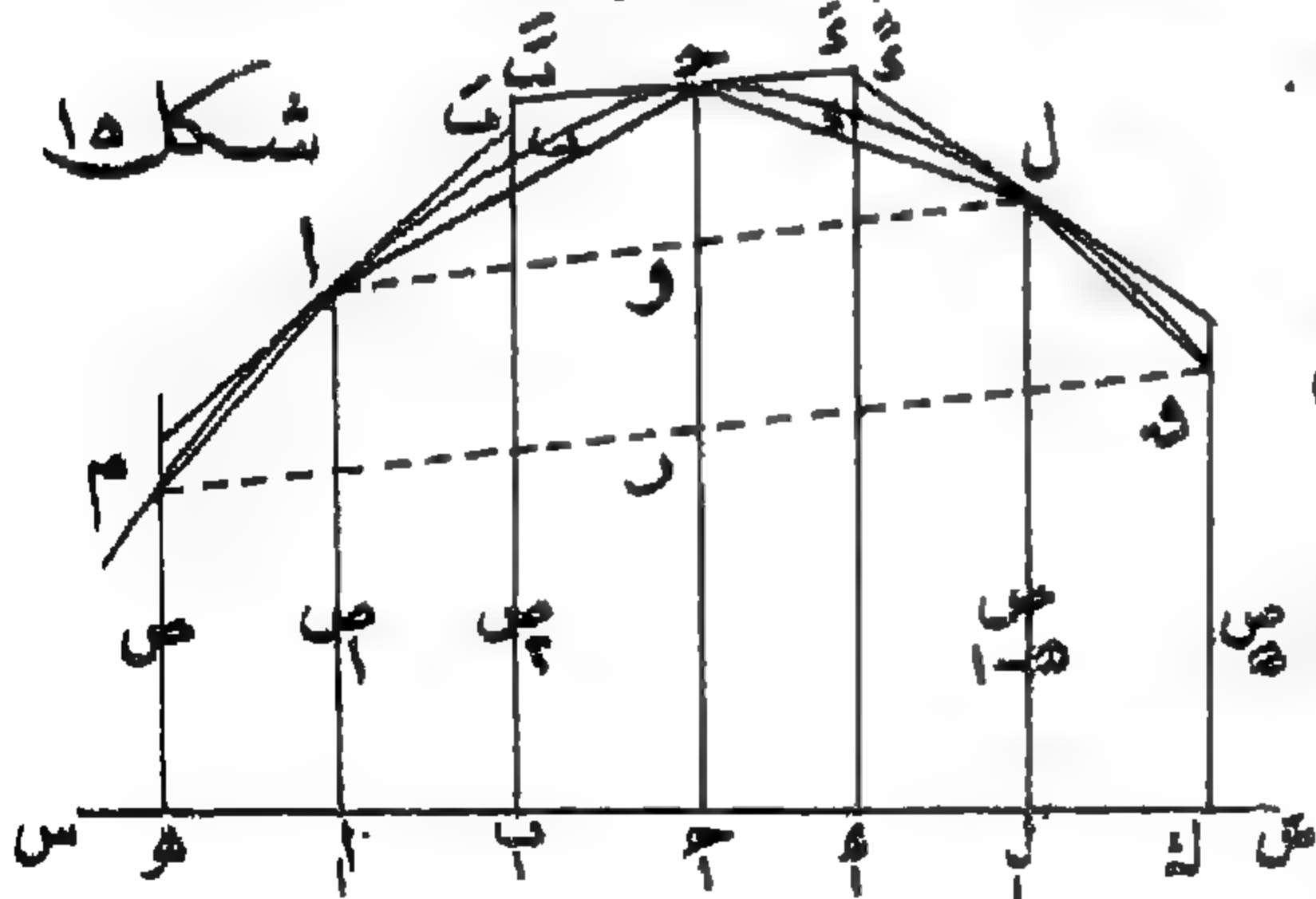
وَيَجْمَعُ وَبِزَمِّهَا صِلَ جَمْعُهَا
بِحَرْفِ ط فَتَكُونُ مَسَاحَاتِهَا

على النور الى هي

$$ع - \frac{ص + ص_1}{ص_2 + 1} ع - (ص + ص_1) ع - (ص + ص_1) ع - \dots - (ص + ص_1) ع - (ص + ص_1) ع$$

ورجّع هذه المساحات على بعضها بحديث

$$ط = ع + \frac{ص}{4} + (ص_1 + ص_2) \times + (ص_3 + \dots + ص_9 + ص_{10}) \times$$



فاذا اضفنا كمية $\frac{ص}{ص+ص}$ وطرحناها من الكمية التي داخل القوسين حدث
 $ط = ع - \frac{ص}{ص+ص} + (ص + ص + ص + \dots + ص) \frac{ص}{ص+ص}$
 ثم نرسم من نقط $ا$ و $ح$ راخ التي هي نهايات الاحداثيات الرأسية الزوجية
 الوضع مما سات للمخني المعلوم فتكون من ذلك جملة أشباه منحرف جد سية
 مثل $م ه ب ب ت ر ت ب ب ع$ راخ التي يمكن ايجاد مساحتها بالسهولة
 لان ارتفاع كل منها مساو الى $ع$ وفيها الاحداثي للنسوب لنقطة التماس
 مساو الى نصف مجموع القاعدتين فاذا رمز بحرف $ط$ لمجموع هذه الاشباه
 منحرف كان

$$ط = ع (ص + ص + ص + \dots + ص)$$

فاذا تأملنا نجد ان مقدار $ط$ اصغر من المساحة المطلوبة وان مقدار $ط$
 اكبر منها وذلك كما في مثالنا هذا (واما حينما يكون تحليب المخني جهة المستقيم
 $س س$ فيكون الامر بالعكس) وعلى هذا اذا اخذنا المتوسط بين مقدار $س$
 $ط$ $ر ط$ تحصل مقدار للمساحة المقررة جدا من المساحة الحقيقية فاذا رمز
 بحرف $ح$ لهذه المساحة المقررة جدا حدث

$ح = \frac{ط + ر ط}{2} = ع - \frac{ص}{ص+ص} + (ص + ص + ص + \dots + ص) \frac{ص}{ص+ص}$
 واما اذا كان للمخني بعض انقلابات يلزم أولا ان ترسم الاحداثيات الرأسية
 المارة بنقط الانقلاب وتؤخذ مساحة كل شكل من الاشكال الحادثة على
 حداثها وتجمع المساح الحادثة على بعضها فتحدث المساحة الكلية
 $س$ ومن المشاهد في هذه الطريقة انه لا يحتاج فيها الى القياس الاحداثيات
 المتطرفة والاحداثيات المزدوجة الوضع وعليه فيكون العمل بها اسرع من الطريقة
 للتقدمة سيما انه يحصل بها على مساحة اقرب الى المساحة الحقيقية من الاولى
 ولها مزية اخرى وهو انه يمكن بواسطتها معرفة نهاية الخطاء الذي يحدث فيها
 وفي الواقع من حيث ان هذا الخطا بالبداية اصغر من نصف الفرق بين المساحتين
 وهما $ط ر ط$ فيكون

$$\text{الخطا} = \frac{ط - ر ط}{2} = ع - \frac{ص}{ص+ص} - (ص + ص + \dots + ص) \frac{ص}{ص+ص}$$

وفي هذا القانون يمكن تقدير الكمية الموجودة بين القوسين بالطريقة الهندسية
 لانه في الواقع اذا وصل بين نقطتي $م ر$ و نهايتي المخني مستقيم وكذا بين
 نهايتي

نهايتي الاحداثي الثاني والاحداثي الذي قبل الاخير مستقيم آخر حدث
مستقيمان قاطعان للاحداثي المتوسط في نقطتي ر و و فيحدث من شبي
المخرفين م هـ ك و ر ا ا ل ل أن

$$ر ح = \frac{ص + ص}{٤} ر و = \frac{ص + ص}{٤}$$

ومنهما يكون

$$و ح - ر ح = و ر = \frac{ص + ص}{٤} ا - \frac{ص + ص}{٤}$$

وبناء عليه يكون

$$ط - ط = ع \times و ر$$

وهذا المقدار يكون في العادة أكبر من الخطأ الحادث في العملية بمعنى انه يكون نهاية
لذلك الخطأ

١٦ - تطبيق على ذلك - لأجل مقارنة العمل هاتين الطريقتين نطبق كلاهما
على التوالي في كيفية إيجاد مساحة قطعة دائية كالقطعة ا ب حـ (شكل ١٦)
المحصورة بين نصف القطر ا ب وبين قوس الدائية ب حـ المقوساويا
الى ٣٠° وبين المستقيم ب حـ الموازي الى نصف القطر ا ب وبين المستقيم
ا ب المقام من المركز ا عموديا على نصف القطر ا ب
فاذا فرضنا ان نصف القطر ا ب مساويا الى ١ وقسمنا المسافة الكائنة
بين الاحداثيين المتطرفين الى اربعة اجزاء متساوية

$$ص = ٠.٠٠٠ ر$$

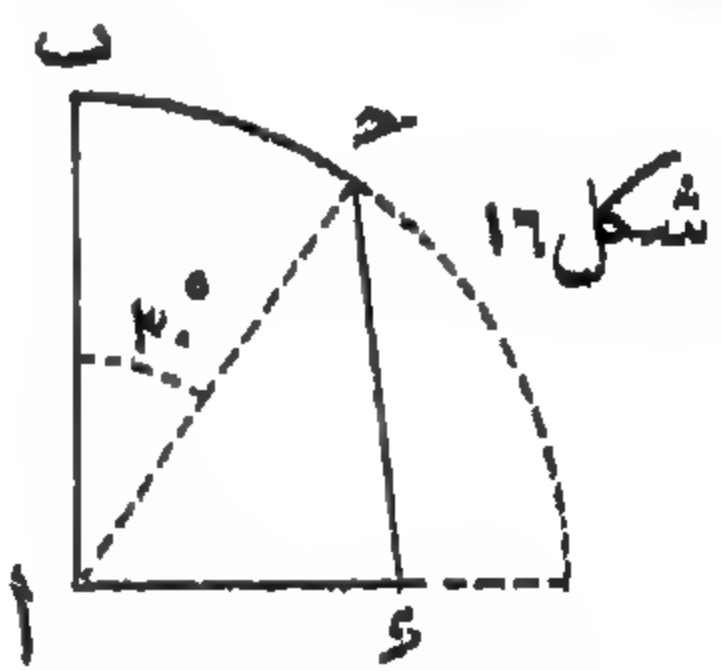
$$ص = ٠.٠٠٠ ر$$

$$ص = ٠.٠٠٠ ر$$

$$ص = ٠.٠٠٠ ر$$

$$ص = ٠.٠٠٠ ر$$

$$ع = ٠.٠٠٠ ر$$



فبمقتضى الطريقة الاولى على طريقة اشباه المخرف يكون

$$ح = ٠.٠ (٠.٠٠٠ + ٠.٠٠٠ + ٠.٠٠٠ + ٠.٠٠٠ + ٠.٠٠٠)$$

$$= ٠.٠٠٠٠٠٠$$

وبطريقة بونسلية يكون

ح = ٥ ر = $\frac{37461+4}{2} - \frac{37081+39686}{2} + \frac{37081+39686}{2} = 7600$ م^٢
 وحيث انه ممكن في هذا المثال حساب المساحة المطلوبة بالضبط أعني ممكن
 ايجاد حقيقتها وذلك بملاحظة أنها مركبة من قطاع دائرة قوسه ٥٠
 مساحته مساوية بالضرورة الى جزء من اثني عشر جزءا من سطح الدائرة
 مضافا اليه مثلث قائم الزاوية أحد ضلعي قائمته هو مسقط القوس على المستقيم
 المقابل له والضلع الثاني مساو لنصف ضلع المثلث المتساوي الاضلاع
 المرسوم داخل هذه الدائرة

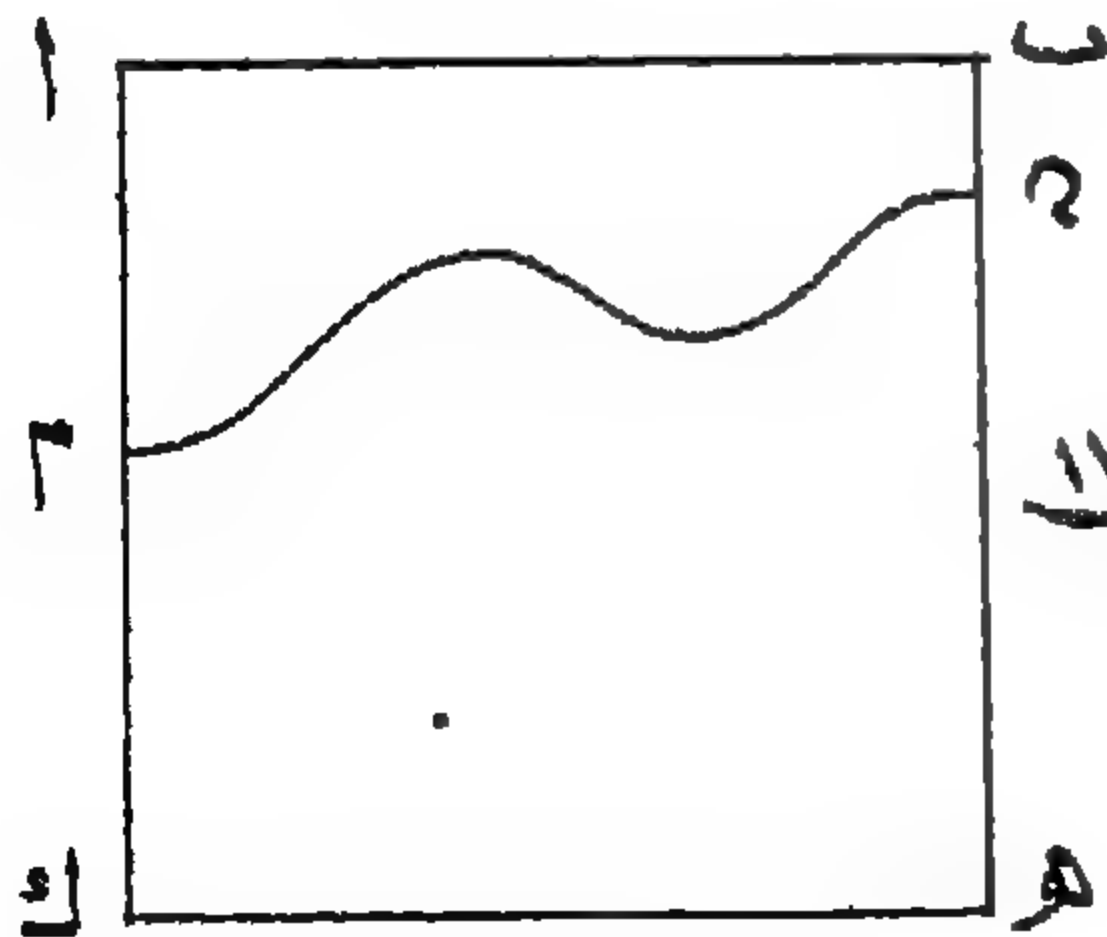
فحينئذ تكون المساحة الحقيقية هي

ح = $\frac{7600}{2} + \frac{7600}{2} = 7600$ م^٢ = $(\frac{37}{2} + \frac{1}{2}) \times 8 = (\frac{37}{2} + \frac{1}{2}) \times 16 = \frac{37}{2} \times 16 + \frac{1}{2} \times 16$
 وحينئذ يكون الخط المتصل من الطريقة الأولى هو ٠.١٠ ر. والمتصل
 من طريقة يونسليه هو ٠.٠٢٧ فقط وإذا حسبنا نهاية الخط بالقانون
 المتقدم المختص بذلك نجد أن

الخطا $\frac{2}{3} = [37461+4 - 37081+39686] = 0.066$ ر.
 فيشاهد أن هذا الخطا أكبر من الخطا الحقيقي بعشر مرات

وهناك توجد طريقة أخرى لايجاد المساحة التقريبية للاشكال المنحنية وهي
 المنسوبة الى المسيو (توماس ميسون) لكن لا يمكن ذكرها في هذا المحل كونها
 مبنية على خاصية في القطع المكافئ ولذلك قد أخرجنا هنا لكن سنذكرها بعد
 الكلام على القطع المكافئ أن شاء الله تعالى

سند (في كيفية تعيين المساحة بالوزن) هذه الطريقة التي ليست هندسية
 بالكلية تستعمل كثيرا في العمل



مثلا ليكن م هـ ك (شكل ١٧)

هو الشكل الذي يراد ايجاد مساحته

فيرسم أولا هذا الشكل على فرخ

من الورق أو من المعدن مماثل

التركيب والمادة تماما لاجيدا ومحدد

النمك في جميع امتدادة ويمد

الاحداثيات هـ ر ك م حتى يتكون عنها شكل مستطيل مثل ا ب هـ ك

فتؤخذ

فتؤخذ مساحته بالطريقة المعتادة ثم يقطع هذا المستطيل من الفرج أو اللوح
المرسوم هو عليه ويوزن بميزان كثير الاحساس ثم يقطع اللوح على حسب محيط
المخني ويوزن الشكل الأصلي وهو $م هـ$ $م ك$ وحيث أنه في هذه الحالة
تكون المساحات مناسبة للثقالة وقد علم ثقل المساحتين واحدهما فتحل
المسئلة بواسطة القاعدة الثلاثية مثلاً اذا رز مجرف $ج$ لمساحة المستطيل
ومجرف $و$ لوزنه ومجرف $و$ لوزن الشكل الذي يراد معرفة مساحته
ومجرف $س$ لمساحته المجهولة فيكون

$\frac{س}{و} = \frac{ج}{و}$ ومنه يكون $س = \frac{ج \times و}{و}$
وهذه طريقة قديمة وكانت مستعملة في ابتداء هذا القرن ومع ذلك فإنه لم
يترك استعمالها الى الآن بل تستعمل نادراً في الأشغال العملية

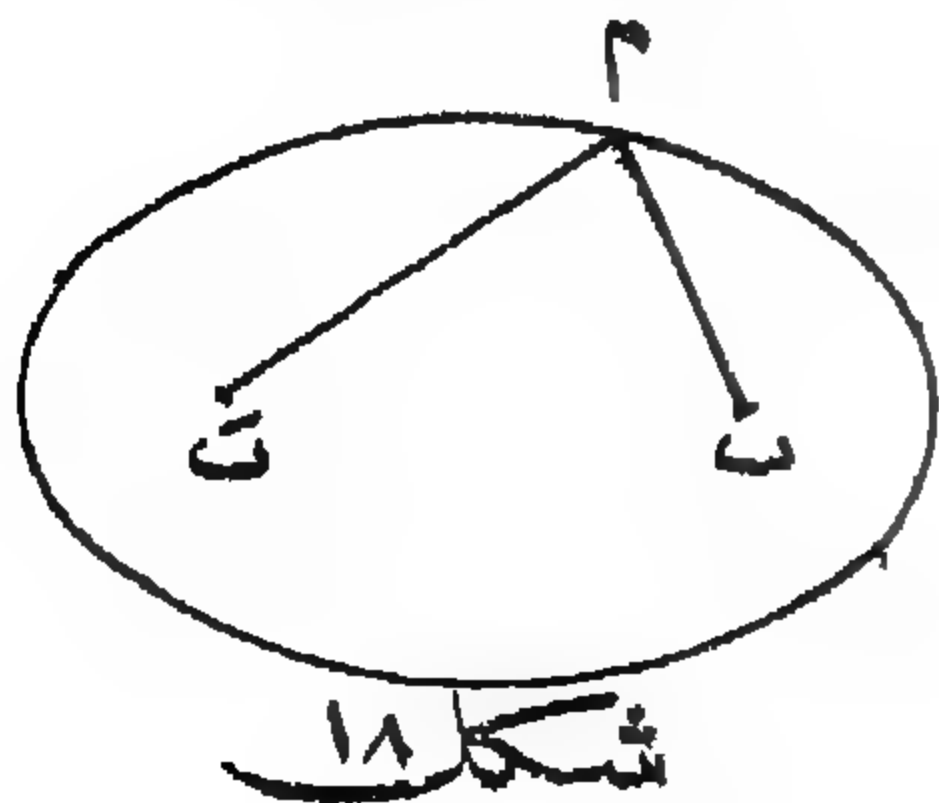
الباب الثاني

في القطع الناقص والمخني الناقص

الفصل الاول

في تعريف مخني القطع الناقص وفي طرق رسمه

٢٢٨ ساعد القطع الناقص هو مخني مستقيم مجموع بعدى أى نقطة من محيطه
عن نقطتين ثابتتين داخله يساوى كمية ثابتة
والنقطتان المفروضتان داخله الثابتتان تسميان بوريين والبعدان الواصلان
من بوريته الى نقطة حيثما اتفق من محيطه يسميان بعدين بوريين ونصف قطر
بوريين



وهذا المخني يكون بالضرورة مخنياً مقفولاً
٢٢٩ ساعد (في رسم القطع الناقص بطريقة الاستمرار)
تنتج من تعريف القطع الناقص طريقة
لرسمه بحركة مستمرة ولذلك يرمز بكمية $ق$
لمجموع نصفي القطرين البوريين ويؤخذ

يخط طوله مساو لهذه الكمية وتثبت نهايتا هذا الخيط في مساميرين رفيعين
موضوعين في البورتين ب ر ت (شكل ١٨) ثم يشد الخيط بسن قلم الرسم
ويحرك القلم مع جعل الخيط على الدوام مشدودا فمن البدء الى ان سن القلم يرسم
انشاء تحركه محيط القطع الناقص

وهذه هي الطريقة التي تستعملها الجناينية حينما يريدون تخطيط القطع الناقص
على الارض انما يستعوضون في هذه الحالة المسامير ان والقلم الرصاص بثلاثة أوتاد
يوضع اثنان منها في البورتين والثالث يحرك باليد بدل قلم الرسم ويستعوض
أيضا الخيط بجعل طوله مساويا الى n

لكن من الملاحظ انه لا يتحصل بهذه الطريقة على الضبط الكلي في تعيين نقط
القطع الناقص التي تكون قريبة من المستقيم الواصل بين البورتين لانه لقرب
جزئ الخيط وانطباقها على بعضهما تقريبا لا يكون أحدهما مستقيما وفضلا
عن ذلك انه متى رسم أحد نصف القطع الناقص لزم بالجبر رفع القلم من داخل
الخيط لاجل امرار الخيط الى الجهة الثانية من المستقيم ب ر ت وذلك لاجل
رسم النصف الآخر لكن يمكن بسهولة مداواة عيوب هذه الطريقة باستعمال
الطريقة الآتية

(طريقة ثالثة) يستعمل في هذه الطريقة خيط طرفاه مربوطان ببعضهما
طوله الكلي مساويا الى $n + 2$ بفرض أن 2 هو البعد بين البورتين
ثم يلف هذا الخيط على المسامير ويجعل على الدوام مشدودا بواسطة القلم
فهذه الكيفية يمكن رسم القطع الناقص باكمل دقة واحدة بدون
وقوف أبدا

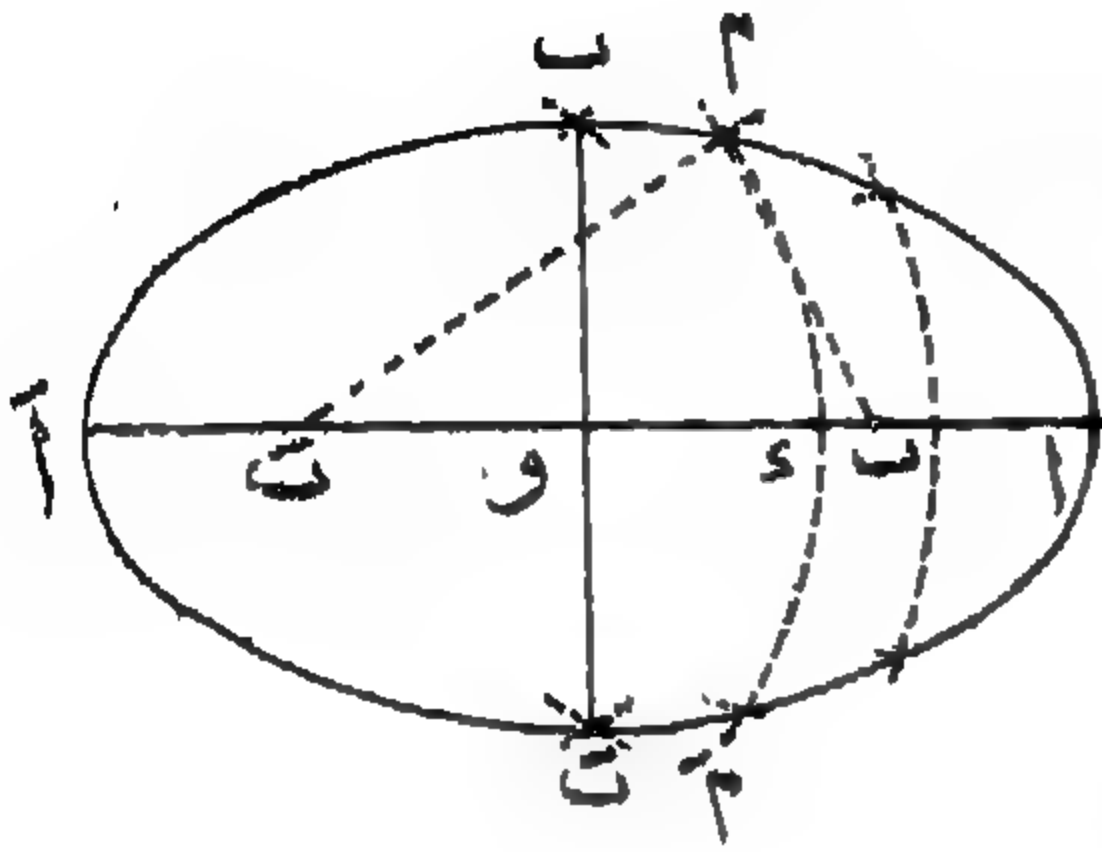
هذه الطريقة وان كانت سهلة وسريعة العمل لكنها قليلة الضبط أيضا
لانه يصعب أولا عقد الخيط بحيث يكون جزءه المطلق مساويا بالضبط الى
الطول المعلوم ثانيا لانها تستلزم استعمال خيط رفيع لاجل سهولة انشاء
فيتسبب عن ذلك تغيير طول هذا الخيط بحسب كثرة شدته وقلته

نشد (رسم القطع الناقص نقطة فنقطة) حينما يراد رسم القطع الناقص
بالضبط فالأحسن ان تعين منه جولة نقط ثم تمرر الخيط منحن متصل
ولاجل الحصول على النقط الكافية لذلك يستسهل استعمال المسرجل

مثلا

مثلا ليكن ب ر ت (شكل ١٩) هما بورتا القطع الناقص الذي يبراد
رسمه فيؤخذ على المستقيم الواصل

شكل ١٩



بينهما بعد ت ك مساويا الى م
ثم تجعل نقطة ت مركزا ويرسم
محيط دائرة حيثما اتفق فيقطع خط
ب ت في نقطة و وتجعل ايضا ك
نقطة ب مركزا وينصف قطر
مساويا الى و ك يرسم محيط دائرة
يقطع الاول في نقطتين مثل م م

فمن البديهي أن تكون هاتان النقطتان من القطع الناقص وهذا السبيل
يمكن ايجاد جلة نقط بحسب الارادة بتغيير وضع نقطة و ويلاحظ أنه
في كل وضع من اوضاع نقطة و يمكن ايجاد أربع نقط من القطع الناقص
ويكفي لذلك أن يبدل العمل على البورتين ب ر ت بمعنى أن تجعل نقطة ب
مركزا وترسم دائرة كالدايرة التي رسمت بجعل نقطة ت مركزا والعكس بالعكس
ومن للشاهد بالسهولة أيضا أن نقطة و لا يمكن أن تشغل على المستقيم
ب ت أوضاعا اختيارية لأنه يلزم لأجل إمكان تقاطع الدائرتين أن يكون
البعد بين مركزيهما على الدوام أصغر من مجموع نصفي القطرين وأكبر من
فاصلتهما ولا شك أن ذلك يستلزم أن لا يكون أحد نصفي القطرين أكبر من
البعد ت ا ولا أصغر من الك حيث كانت نقطة ا وسطا للبعد ب ك

في بعض قواعد ونظريات هندسية

سأستد النظرية الاولى - القطع الناقص منحني محدب
ولا ثبات ذلك يكفي أن نبرهن على أن المستقيم لا يقطعه الا في نقطتين وينتهي
الى ذلك بشرح المسئلة الآتية

وهي طريقة ايجاد نقطتي تقابل للمستقيم بمنحني القطع الناقص التي يؤل منظورها
الى المنطوق الآتي

للمعلوم نقطتان ومستقيم والمراد ايجاد النقطة الكائنة على هذا المستقيم التي

وبناء على ذلك يكون

$$b \times c = b \times c = c \times b$$

وحينئذ تكون الأربع نقط b, c, c, b ك c, b موجودة على محيط دائرة واحد معنى اننا اذا امرنا بنقطتي b, c ثم بنقطة c الاختيارية محيط دائرة مرأيا بنقطة c الموجودة على المحيط المعلوم وعلى المستقيم c, b وحيث اننا لا نبحث في المسئلة التي نحن بصدد حلها الا عن مركز هذه الدائرة فليس رسمها ضروريا بل يكفي أن نصل من نقطة b الى نقطة c بمستقيم فيقطع المستقيم المعلوم في المركز المطلوب m

وحيث انه يمكن من نقطة c تمرير مماسين للدائرة فيوجد حينئذ للمسئلة حل آخر هو m يتصل عليه بوصل نقطة b مع نقطة تماس المماس الآخر فاذا كانت نقطة c موجودة على محيط الدائرة الذي مركزه نقطة b فلا يوجد للمسئلة الا حل واحد وتكون المسئلة غير ممكنة للحل اذا كانت نقطة c داخل محيط الدائرة المذكور

وحينئذ تبين ان لهذه المسئلة على الاكثر حلان اثنان فقط معنى انه لا يمكن المستقيم ان يقابل محيط القطع الناقص الا في نقطتين وهذا هو ما لزم اثباته

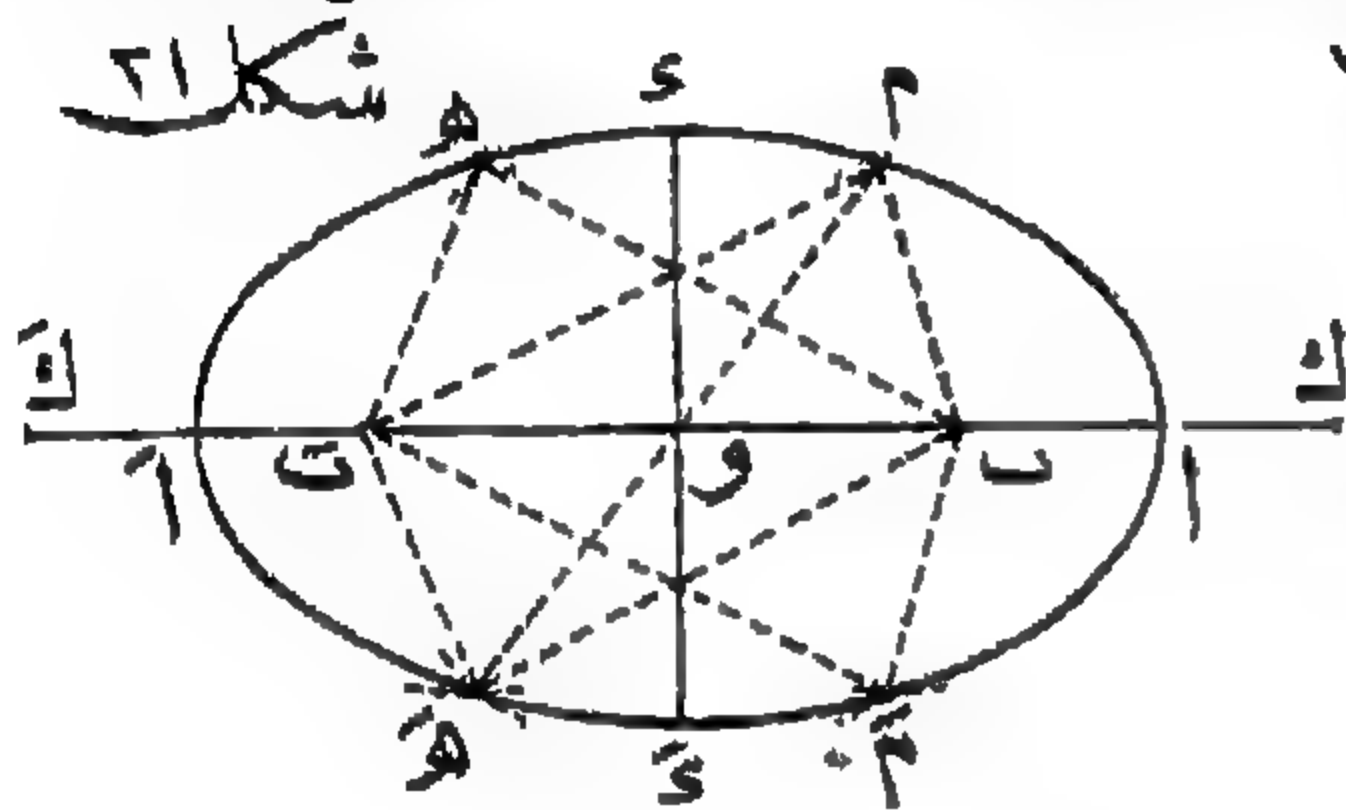
في محاور القطع الناقص ورؤسه

سند النظرية الثانية — المستقيم الواصل بين بورتين بورتين قطع ناقص والمستقيم العمودي عليه من وسطهما محورا هذا المعنى

لأننا اذا لاحظنا ما سبق في كيفية رسم المعنى بالطريقة الثانية المذكورة في سند وجدنا ان أي نقطة من محيط القطع الناقص قد تعينت من تقاطع قوسين مرسومين بجعل كل من البورتين مركزا وينصفي قطرين مجموعهما يساوي $2a$ لكن من البديهي انه اذا تقاطع محيطا دائرتين حدث من تقاطعهما نقطتان متماثلتا الوضع بالنسبة للمستقيم الواصل بين مركزيهما فيظهر من ذلك أن نقط محيط القطع الناقص متماثلة مشي بالنسبة للمستقيم b, c وبناء عليه يكون هذا المستقيم محورا له وذلك هو مقتضى التعريف المفرد في سند سند ثانيا قد أورينا أيضا في سند (٣) أنه بعد إيجاد نقطتي m, n (شكل ٢٠)

يمكن بتغيير العمل على البورتين ب ر ك ايجاد نقطتين اخريين مثل ه ر ه
من القطع الناقص ومن البديهي أنه اذا دوير الشكل حول مستقيم ع ع العمودى
على وسط المستقيم ب ت نصف دورة صاريت نقطة ب فى ت ونقطة
ت فى ب وكذا تأخذ نقطة ه وضع نقطة م والعكس بالعكس ويظهر
حينئذ أن نقط النقط متماثلة الوضع أيضا بالنسبة الى مستقيم ع ع فيكون
هذا المستقيم بالضرورة محورا آخر له

وننتج من ذلك ان للقطع الناقص اربع رؤس سهلة الايجاد وفى الواقع كذلك
لانه مشاهد ان الرأس ا الموجود على المحور



ب ت هي وسط البعد ب ك اذ يلزم

أن يكون $ت ا = ا ب + ب ك$
ويطرح ب ا من كل من الطرفين يحدث
 $ب ا = ا ك$

وأما الرأس أ فلتعينها يؤخذ الطول

ب ك = ت ك على المحور وينصف بعد ت ك أو يؤخذ ت آ = ب ا
(تنبيه) من المهم ملاحظة أن المحور الأكبر ا أ يلزم أن يكون مساويا لمجموع
نصفى القطرين البورين الذى هو كمية ثابتة ونفى الواقع لأن

$$ا ا = ت ك - ا ك + ا ت$$

وحيث انه معلوم ما تقام أن $ا ك = ا ت = ب ك$ فحينئذ يكون

$$ا ا = ت ك = ٢ ب ك$$

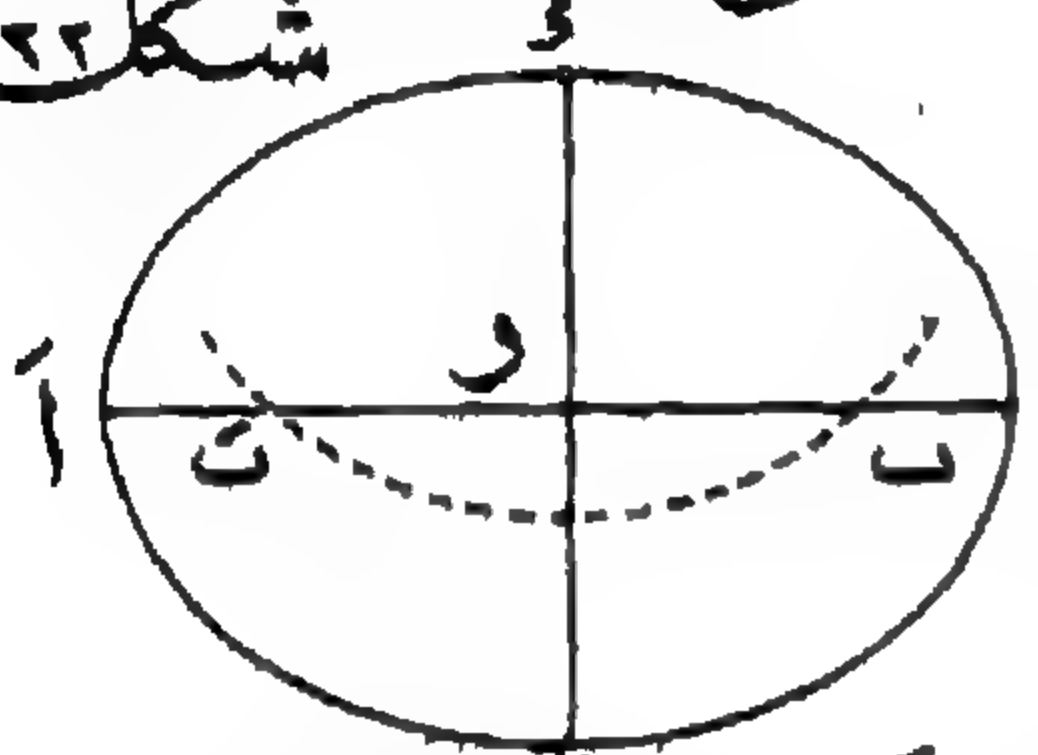
وأما الرأسان ع ر فلتعينهما يلاحظ أن نصفى القطرين البورين ع ب
ر د متساويان متساويا البعد عن موقع العمود ع و وبناء على ذلك يكونان
متساويين فيكون حينئذ لايجاد هاتين النقطتين أن تجعل النقطتان ب ر
مركزين ونصفى قطرين متساويين وكل منهما مساويا لنصف البعد ت ك
أو الى و يرسم قوسا دائرتين فتعين من تقاطعها الرأسان ع ر
مشهد يشاهد ما تقدم انفا ان المحور المسار بالبورتين هو الأكبر وذلك لأن
ع و عمود ر ع ب مائل فيكون

$$ع و = ب ر = ا و أو ع و = ا ا$$

ولسبب

وبسبب ذلك قد سمي أحد المحورين بالمحور الأكبر والآخر بالمحور الأصغر
 مستنداً إذاً من الكميات r و r' و h و h' لمقادير كل من المحور الأكبر
 والمحور الأصغر والبعد بين البورتين حدث من المثلث القائم الزاوية $وب$ و $ب'$
 هذا القانون $h^2 + h'^2 = r^2$
 الذي بواسطته يمكن حساب أحد تلك الكميات الثلاث من بعد معلومية
 الأثنين الآخرين

مستند بناءً على ما تقدم يمكن أن يقال أن القطع الناقص بصير معلوماً إذا علم مقدار
 كل من محوريه وفي الواقع لأن البعد بين البورتين يستخرج من القانون المتقدم
 الذي ينتج منه أن

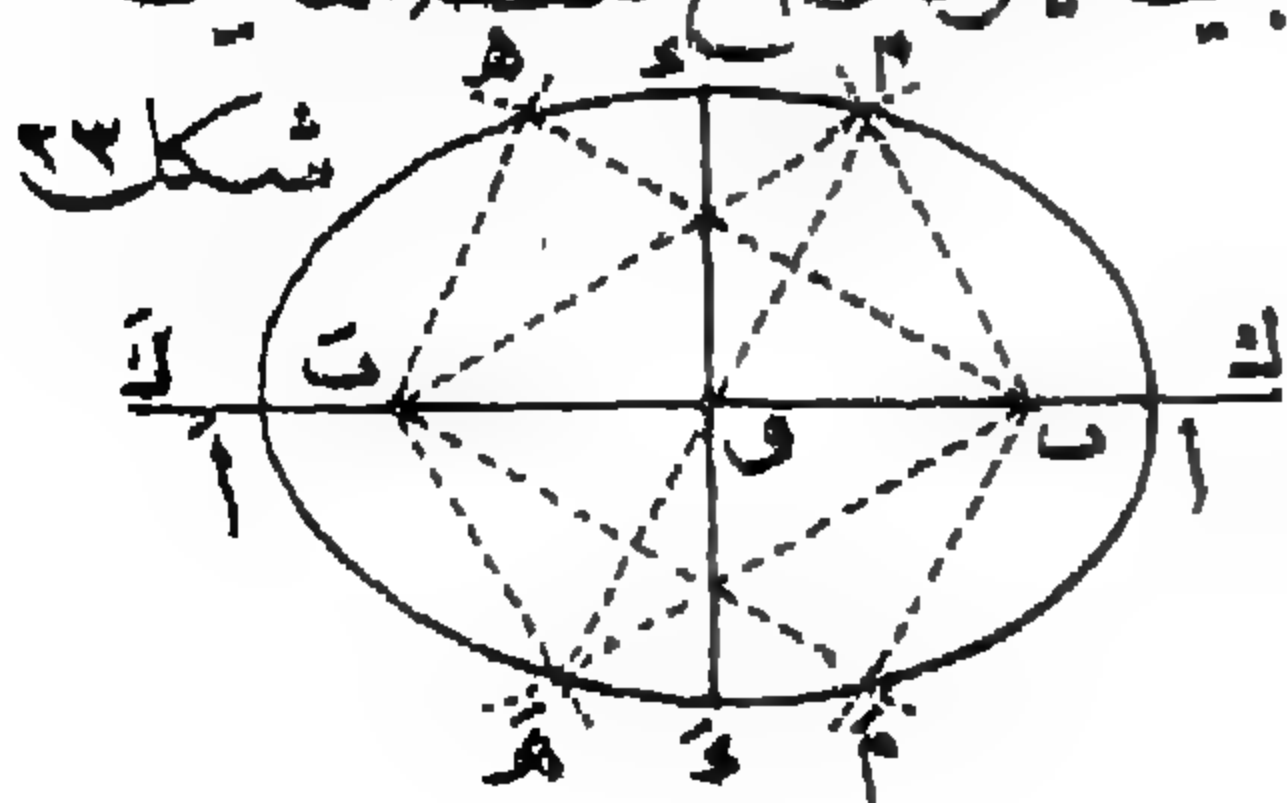


وإذا كان المراد تعيينه بالطريقة الرسمية
 فيرسم مستقيمان متعامدان على بعضهما
 في نقطة مثل $و$ (شكل ٢٢) ويؤخذ بجانب

نقطة تقاطعها وهي $و$ بعلمان مثل $وا$ و $وا'$ متساويان وكل منهما مساو
 إلى $ر$ وكذلك يؤخذ البعدان $ود$ و $ود'$ متساويين وكل منهما مساو
 إلى $ر'$ ثم تجعل نقطة $ع$ مركزاً ونصف قطر مساو إلى $وا$ يرسم قوس
 دائرة ليقابل للمستقيم $ا$ في نقطتين مثل $ب$ و $ب'$ تكونان هما البورتان
 ثم بعد ذلك تستعمل إحدى الطرق السابقة ذكرها الرسم المنحني

في مركز القطع الناقص

مستند النظرية الثالثة - نقطة تقابل المحورين هي مركز القطع الناقص
 وليبان ذلك تعتبر نقطة حيثما اتفق مثل $م$ من هذا المنحنى (شكل ٢٣) ونقطة
 أخرى مثل $هـ$ منه أيضاً موضوعة في الزاوية الواقعة بين المحورين المقابلة
 للزاوية الموجودة بها النقطة الأولى لكن بحيث يكون وضع النقطة الثانية
 معيناً بالشرط الآتي



$$\begin{aligned} ب م &= ت هـ \\ ر ب &= م هـ \end{aligned}$$

فتكون الاضلاع المتقابلة من الشكل الرباعي ب م ت هـ متساوية
وبناء على ذلك يكون شكلا متوازي الاضلاع وقطره منصفين بعضهما بعضا
بحيث يكون مستقيم م هـ مارا من وسط المستقيم ب ت ويكون
وم = وهـ

وينتج حينئذ من ذلك ان نقط الممخني متماثلة متنى بالنسبة لنقطة وتكون
هذه النقطة مركز المنحنى وذلك بناء على التعريف المقرر في ٢٤

٢٤ الاختلاف المركزي - اذا زاد المحور الاصغر بدون ان يتغير المحور
الاكبر او صغر البعدين البورتين بدون ان يتغير المحور الاكبر ايضا قرب المنحنى
شيئا فشيئا من ان يصير دائرة فاذا استمر تقارب البورتين من بعضهما حتى انطبقا
فمن البديهي ان المنحنى يصير دائرة

وبالعكس اذا بعد البورتان عن بعضهما صغر المحور الاصغر وآل القطع الناقص
في نهاية الامر الى مستقيم وحينئذ يكون شكل القطع الناقص متعلقا في ان
واحد بطول كل من المحور الاكبر والبعدين البورتين

ونسبة البعدين البورتين في أي قطع ناقص الى محوره الاكبر تسمى الاختلاف
المركزي له بمعنى انه اذا ضربها بحرف ف كان

$$ف = \frac{ب}{ا} = \frac{ب}{ب} = \frac{ب}{ا} = \frac{ب}{ا} - \frac{ب}{ب}$$

ويظهر من ذلك حينئذ ان الاختلاف المركزي كمية أصغر من الواحد دائما
٢٤ القطع الناقص يصير معينا بالضرورة اذا علم كل من محور الاكبر
واختلاف المركزي وقد جرت العادة بان تتوصل الفلكيون الى تعيين مدارات
الكواكب السيارة بواسطة هاتين الكميتين

٢٤ النظرية الرابعة - محيط القطع الناقص يقسم مستويا الى قسمين
أحدها داخله والآخر خارج عنه بحيث يكون مجموع البعدين الواصلين
من أي نقطة من القسم الخارجى الى بورتيه أعظم من محور الاكبر ومجموع
البعدين الواصلين من أي نقطة من القسم الداخلى الى البورتين أصغر من
المحور المذكور

فلنعبر أولا نقطة مثل (شكل ٤) موضوعة خارج القطع الناقص
ونصل منها الى البورتين ونقول من حيث ان هذه النقطة خارجة عن المنحنى
مستقيما



فستقيما ے ب رے ت الواصلان
منها الى البورتين يقطعان محيط في نقطتين
ولكن احدهما هي م ففضل م ب
ويكون حينئذ

$$n_2 = \bar{u}_2 + w_2$$

لکھنؤ میں مثلاً م ب مے مچلات

$$u_2 < u_1 + u_2$$

فاذا اضعفنا م ت الى طرفي هذه المتباينة حدث

$$m + b < m + e + b \quad \text{او}$$

$$20 \angle 60^\circ + 10 \angle 0^\circ$$

واما اذا اعتبرنا نقطة مثل ه داخل محيط القطع الناقص ووصلنا منها الى
البورتين بمستقيمين مثل ه ب وه ب ثم مددنا احدهما الى أن يتقابل مع
المنحنى في نقطة مثل م ووصل المستقيم م ب حدث من المثلث م ه ب

$$H \rightarrow H + H$$

وبإضافة هـ الى الطرفين يكون

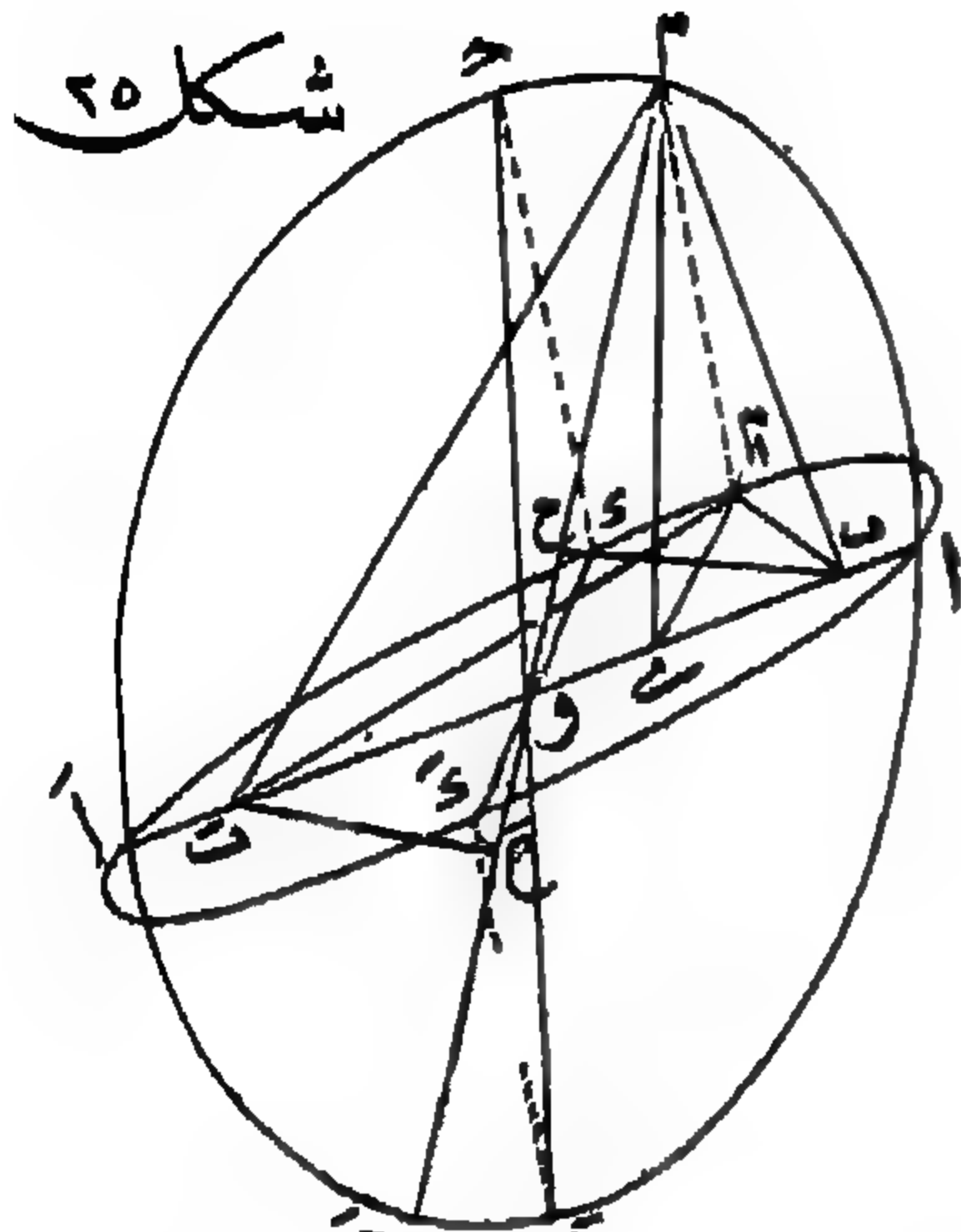
$$a_c = \bar{c}_r + m_b = \bar{c}_h + h_m + m_b \geq \bar{c}_h + b_h$$

وحيث قد اتضح انه على حسب وضع النقطة خارج القطع الناقص أو على محيطه أو داخله يكون مجموع بعديها اليوميين أكبر أو مساوياً أو أصغر من المحور الأكبر للقطع الناقص المذكور

ثالث النظرية الخامسة - القطع الناقص هو مسقط لدائرة مستوياها
ماثل على مستويه

فأولاً لا يخفى أن مسقط شكل متا (على مستوى مسقط معلوم) لا يتغير
أبداً مهما حرك هذا المستوى بالتوازي لنفسه وحينئذ يسوغ لنا أن نأخذ
مستوى المسقط ما را بمرکز الدائرة

اذا تقدر ذلك لنفرض ان $أ ح$ (شكل ٥) هي الدائرة المعلومه و $ا ب$ مسقطها على المستوى المفروض هو المنحنى $ا ء آ$ وثبتت ان هذا المنحنى يكون قطعاً ناقصاً ولذلك يرسم داخل الدائرة قطر مثل $ح ح'$ عمودى على خط



شكل ٢٥

تقاطع المستوي المعلوم بمستوي الدائرة
وهو المستقيم $ا$ فيكون مستقط القطر
للمذكور وهو $د$ عمود ايضا على المستقيم
 $ا$ ثم يؤخذ على $ا$ بعد $و$
 $ب$ مساويين الى $ح$ ويوصل من
نقطة $ب$ حيثما اتفق من محيط الدائرة كالنقطة
م مثلا الى نقطتي $ب$ $ر$ وكذا من
مستقطها وهو $م$ الى نقطتي $ب$ $ر$
ويوصل ايضا القطر $م$ $م$

فاذا انزل الآن مستقيم $م$ عموديا على $ا$ ووصل للمستقيم $م$ $م$
فبمقتضى ما هو مقرنه نظرية الثلاثة اعمدة يكون المستقيم $ا$ $م$ $م$ ايضا
على $ا$ وبالتبعية لذلك تكون اضلاع مثلثي $ح$ $و$ $ر$ $م$ $م$ متوازية
على التناظر ويكون للثلثان المذكوران متشابهين وينتج من تشابههما ان نسبة
 $م$ $م$ $ح$ $و$ $ر$ $م$ $م$

وغير ذلك اذا انزلنا من نقطتي $ب$ $ر$ عمودي $ب$ $ح$ $ر$ $خ$ على القطر
 $م$ $م$ كان مثلثا $و$ $ح$ $ب$ $ر$ $و$ $م$ متشابهين لانهما قائما الزاوية وفيهما الزاوية
الحادة مشتركة فينتج منهما هذا التناسب

$$ح : ب :: و : م :: م : م$$

لكن مستقيما $و$ $ر$ $م$ متساويان بالعمل وكذلك مستقيما $و$ $م$ $ر$
متساويان لانهما نصف قطر دائرة واحدة فتكون في التناسبين السابقين
ثلاثة حدود مشتركة وعلى ذلك يكون $ح : ب = م : م$

وينتج من ذلك ان المثلثين القائمي الزاوية $م$ $م$ $ب$ $ر$ $م$ $ح$ $ب$ مشتركان في
الوتر وان ضلعين منهما متساويان وبذلك يتساوى للثلثان ويكون

$$م : ب = م : ح$$

وكذلك حيث ان مثلثي $م$ $م$ $ب$ $ر$ $م$ $ح$ $ب$ مشتركان في الوتر وفيهما ضلعان
متساويان لان $ح : ب = م : م$ فيكونان متساويين وينتج منهما
ان $م : ب = م : ح$

وغير ذلك

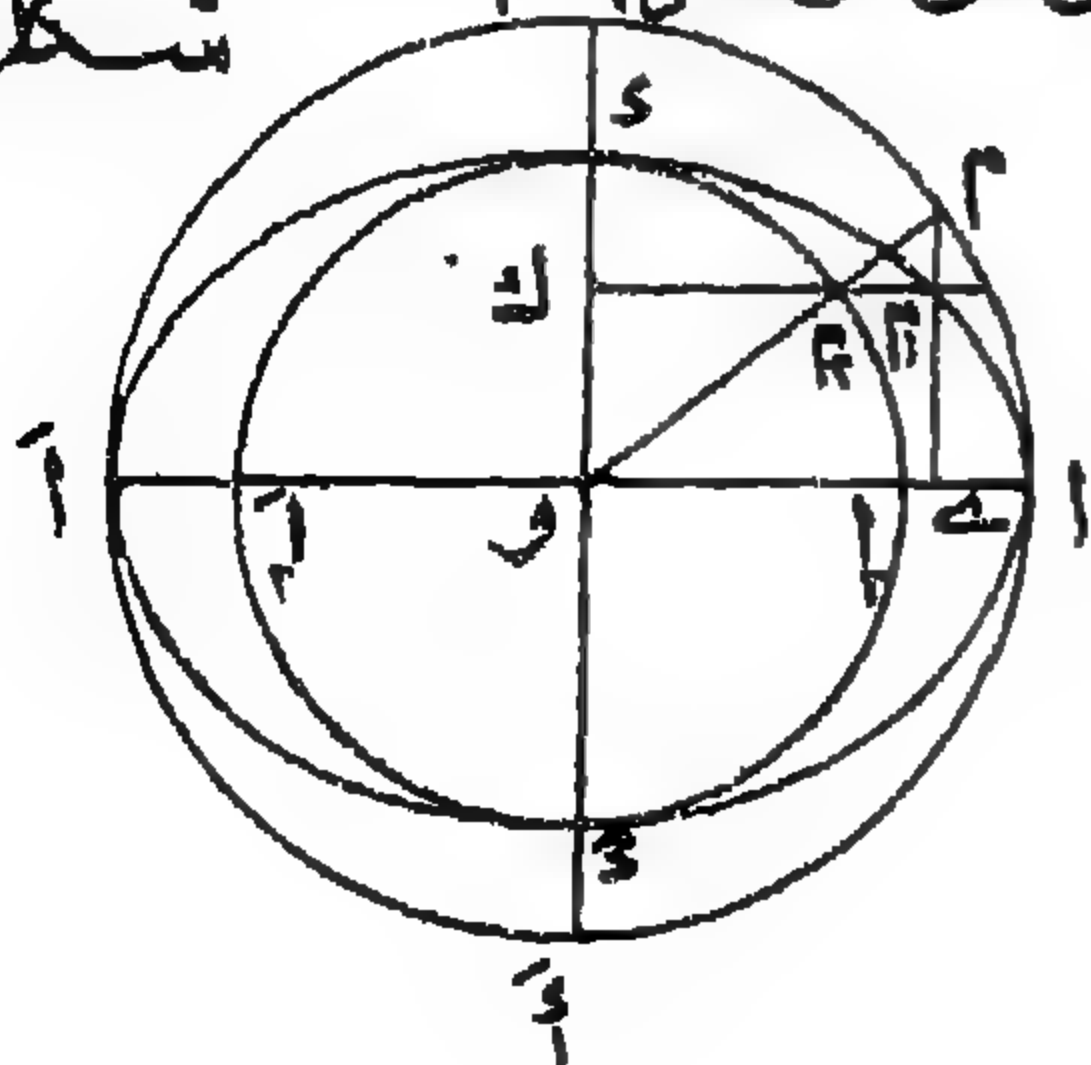
وغير ذلك من البديهي أن مستقيمي $م ح$ و $م ح$ متساويان ولهذا يكون
 $م ب + م ت = م ح + م ح = م م = م م = م م$
 وحينئذ يكون المثلثي الحادث قطعاً ناقصاً بورتاه هما نقطتا $ب$ و $ت$
 سلك إذا رسم مستقيم في مستوى منحنى ما وأنزل من إحدى نقطتي هذا المنحنى
 عمود على هذا المستقيم سمي هذا العمود بالأحدائي الرأسية لهذه النقطة
 إذا تقرر هذا فتنبه من النظرية السابقة ذكرها النتيجة الآتية
 (نتيجة) إذا علم قطع ناقص ودائرة قطرها هو المحور الأكبر لهذا القطع الناقص
 واعتبرنا نقطة من القطع الناقص والنقطة من محيط الدائرة التي تنسقط معها
 في نقطة واحدة على المحور الأكبر كان بين أحدهما الرأسيتين نسبة ثابتة
 وليبان ذلك نتصور أن سطح الدائرة دار حول مستقيم $ا آ$ وانطبق على مستوى
 القطع الناقص فينطبق أيضاً مستقيم $م م$ بالضرورة على مستقيم $م م$
 لكن حيث أن مثلثي $و ح د$ و $م م م$ متشابهان فينتج منهما أن نسبة
 $م م م$: $م م م$: $و د$: $و ح$: $م م م$
 حينئذ يعلم أن نسبة الأحداثيتين المتناظرين في كل من القطع الناقص والدائرة
 إلى بعضهما كنسبة نصف المحور الأصغر إلى نصف المحور الأكبر
 (تنبيه) هذه النسبة متعلقة بميل مستوي المنحني على بعضها لانه ينتج من
 مثلث $و ح د$ أن

$$و د = و ح جتا و د \text{ أو}$$

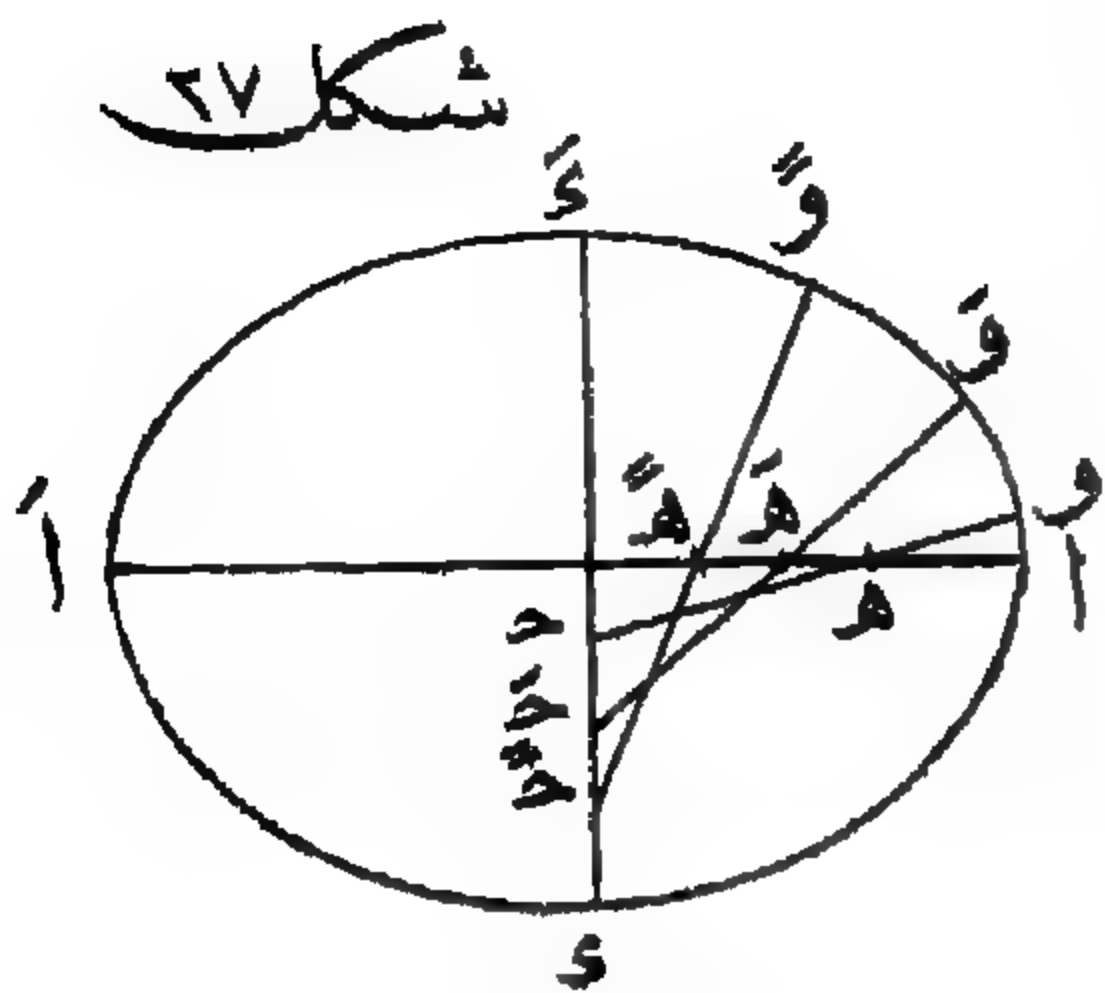
$$\frac{و د}{و ح} = جتا و د$$

سلك وتوجد هذه الخاصية بعينها في حالة ما إذا اعتبرت الأحداثيات العمودية
 على المحور الأصغر والدائرة المرسومة عليه أعني التي هو قطر لها ؟

شكل ٢٦

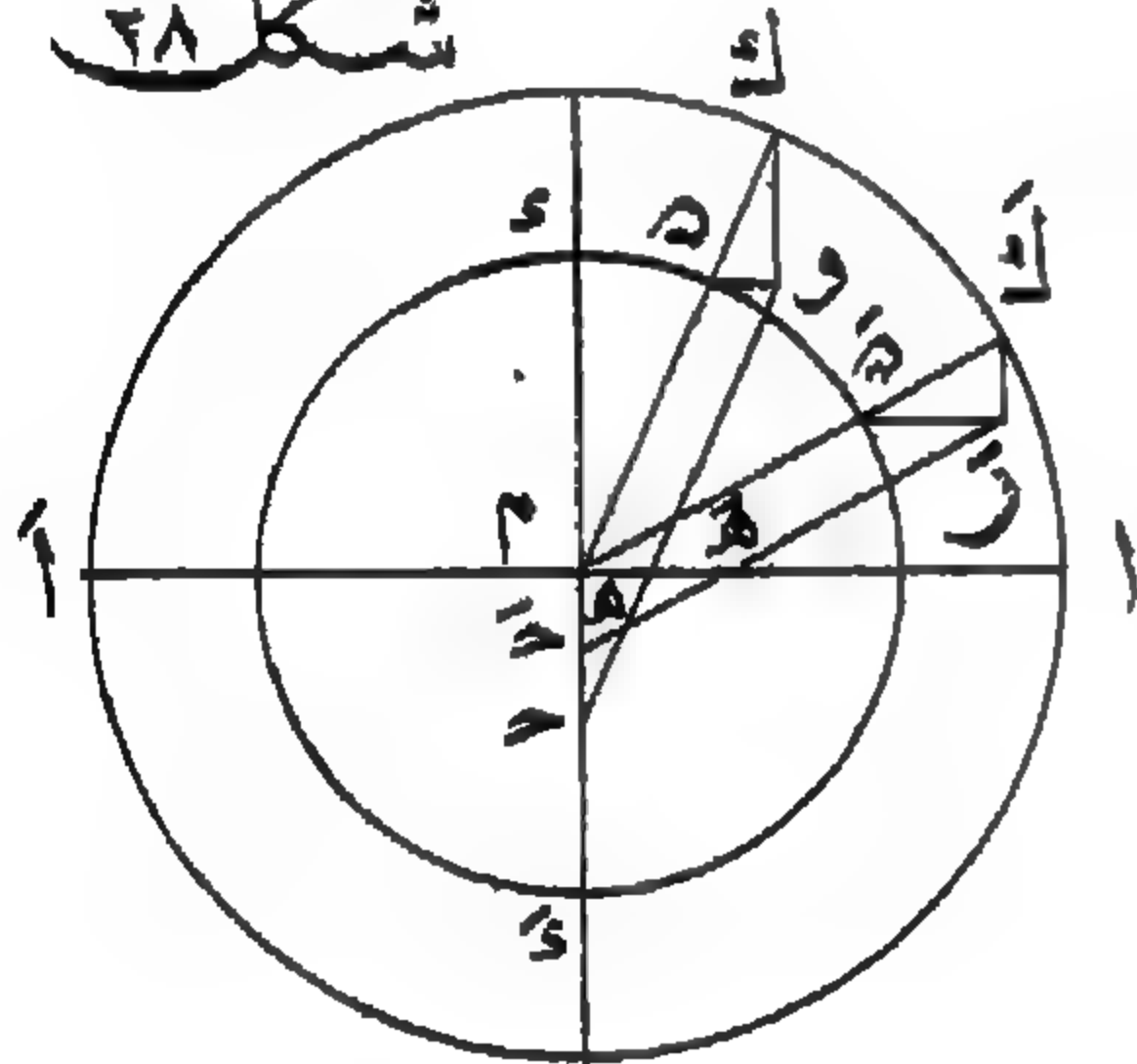


لانه اذا رسم على المحور الأصغر والأكبر
 محيطاً دائريين متحدتي المركز كما في
 (شكل ٢٦) ثم أنزل من نقطة حيثما
 اتفق مثل نقطة $م$ من القطع الناقص
 أحدائتي عمودي على المحور الأكبر والأصغر
 $م م$ و $م د$ على استقامته إلى أن يقابل



المحور الأكبر ثم أخذ على ذلك المستقيم بالابتداء من نقطة و بعد كالبعد وه مساو لنصف المحور الأصغر ثم علنا نقطة ه بإشارة على المستقيم ح ه ولأجل أن تكون ثابتة عليه فاقول إذا حرك المستقيم ح ه وحركة اختيائية لكن بشرط أن تتحرك نهايته ح على المحور الأصغر وبشرط أن تتحرك نقطة ه الثابتة بالنسبة له على المحور الأكبر فإن نهايته الأخرى تتحرك على منحنى القطع الناقص الذي محوره هما ا ا و د د

بمعنى أنه إذا أخذ المستقيم المتحرك أوصافا متجاورة كالأوضاع ح ه و د ح ه و د ح ه و د... الخ كانت النقطة و د و د... الخ نقطتين من القطع الناقص المذكور



وللبرهنة على صحة هذه النظرية بطرق الهندسة العادية نقول تقدم في شد أنه لرسم قطع ناقص محوره معلومان كالمحورين ا ا و د د (شكل ٢٨) يرسم على هذين المحورين دائرتان ثم يرسم نصف قطر حيثما اتفقا مثل م د ك ويرسم من نقطة ه أفقي كالأفق د و ويترك من نقطة ك رأس ك الرأس ك وفيقطع

مع الأفقي في نقطة مثل و تكون هي نقطة من القطع الناقص المطلوب إذا تقر هذا ورسم من نقطة و مستقيم مثل وه مواز إلى نصف القطر ك د م فإنه يقطع أولا المحور الأكبر في نقطة مثل ه بحيث يكون البعد وه مساويا لنصف المحور الأصغر وذلك لأنه من متوازي الاضلاع وه م د يعلم أن وه = د م وبما أن د م مساو إلى د م الذي هو نصف المحور الأصغر لكونهما نصف قطر دائرة واحدة فيكون حينئذ وه = د م أعني مساويا لنصف المحور الأصغر

وثانيا إذا مده من جهة ه حتى يقطع المحور الأصغر في نقطة مثل ح

فأقول أن واحد يكون مساويا لنصف المحور الأكبر لأنه يؤخذ من متوازي
الأضلاع ك واحد م أن واحد = ك م

$$\text{ك م} = \text{ا م}$$

فحينئذ يكون واحد = ا م أعني مساويا لنصف المحور الأكبر
فإذا فرضنا أن نصف القطر ك م انتقل من موضعه وأخذ وضعاً آخر مثل
ك م وأجرنا عليه ما أجرى على نصف القطر ك م تعيينت نقطة أخرى مثل
و من القطع الناقص فاذا رسم منها مستقيم مثل هـ هـ مواز إلى ك م فقطع
المحورين في نقطتين مثل هـ هـ بحيث يكون هـ هـ مساويا لنصف المحور
الأصغر ويكون هـ هـ مساويا لنصف المحور الأكبر

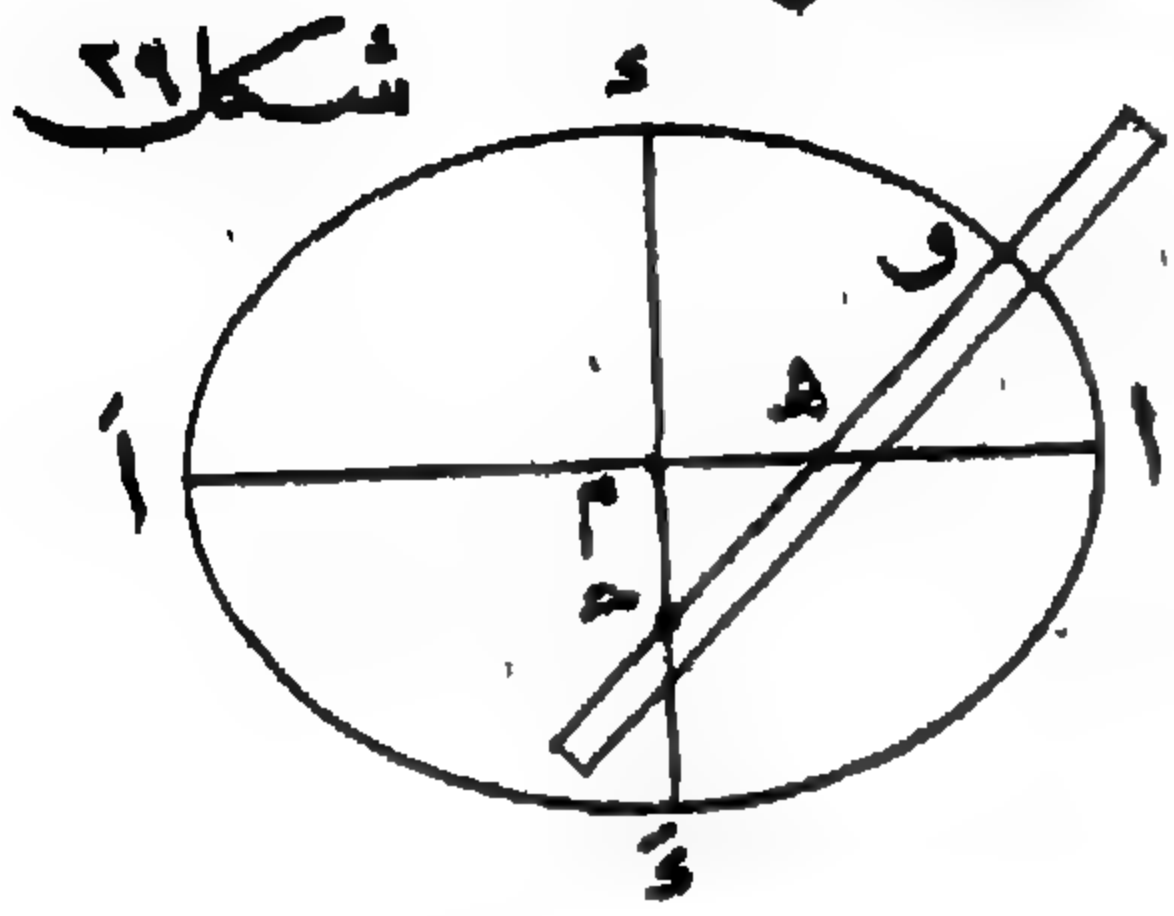
وابتات ذلك واضح من متوازي الأضلاع الجديد وهو ك و ح م وهكذا
كلما تغير وضع نصف القطر حدثت نقطة من القطع الناقص بحيث لو رسم منها
مواز لنصف القطر المذكور تحدد عليه جزآن مساو أحدهما لنصف المحور الأصغر
والآخر لنصف المحور الأكبر

وعليه فيكون عكس ذلك صحيحا أعني أنه إذا تحرك المستقيم هـ هـ الذي
طوله الكلي واحد مساويا لنصف المحور الأكبر من القطع الناقص وطول جزئه وهـ
مساويا لنصف المحور الأصغر حركة بحيث لا يخرج نقطة حـ عن المحور الأصغر
ونقطته هـ عن المحور الأكبر لزم أن تكون جميع الأوضاع التي تأخذها نهايته
الثانية و موجودة على القطع الناقص وهو المطلوب

(تنبيه) اعلم أن لهذه النظرية اثباتا آخر معلوما في علم تطبيق الجبر على الهندسة
وهو الإثبات المشهور والمستعمل في جميع كتب اللغنيات لكن بما أن كتابي هذا
موضوع لتلامذة التحضيرية على الاختصاص وتلامذة هذه المدرسة لم يكن سبق لهم
دراسة علم تطبيق الجبر على الهندسة قد التزمت لأجل أن لا أحرهم من إيا هذه النظرية
للمجملات التي قد أسس عليها برجل القطع الناقص بأن أبحث لهم على إثبات لهذه النظرية
لم يكن مبنيا إلا على الهندسة العادية التي هي من ضمن معارفهم فساءلني
الفكرة لحسن حفظهم ووجدت لهم الإثبات المتقدم الذي لم يكن مبنيا إلا
على خاصية متوازي الأضلاع

سند طريقة رسم القطع الناقص بشرط من الورق أو بالمسطرة

ينج من النظرية السابقة طريقة لرسم القطع الناقص بواسطة شريط من ورق
أن كان المراد رسمه على فرخ من الورق أو بواسطة مسطرة من الخشب أن
كان المراد رسمه على جانب كما تفعل طائفة النحاتين حينما يريدون رسم عقد
اسطوانى دليله قطع ناقص وبيان هذه الطريقة هو الآتى



وذلك أن يعلم بالقلم على حرف شريط الورق
أو المسطرة ثلاث نقط مثل $و$ $هـ$ $ح$
شكل ٢٩ بحيث يكون بعد $و$ $هـ$ $ح$ $م$
أى نصف المحور الأكبر وإن يكون بعد $و$ $هـ$
 $م$ $ح$ أى نصف المحور الأصغر ومن ذلك يكون
 $ح$ $هـ$ مساويا للفرق بين نصفي المحورين

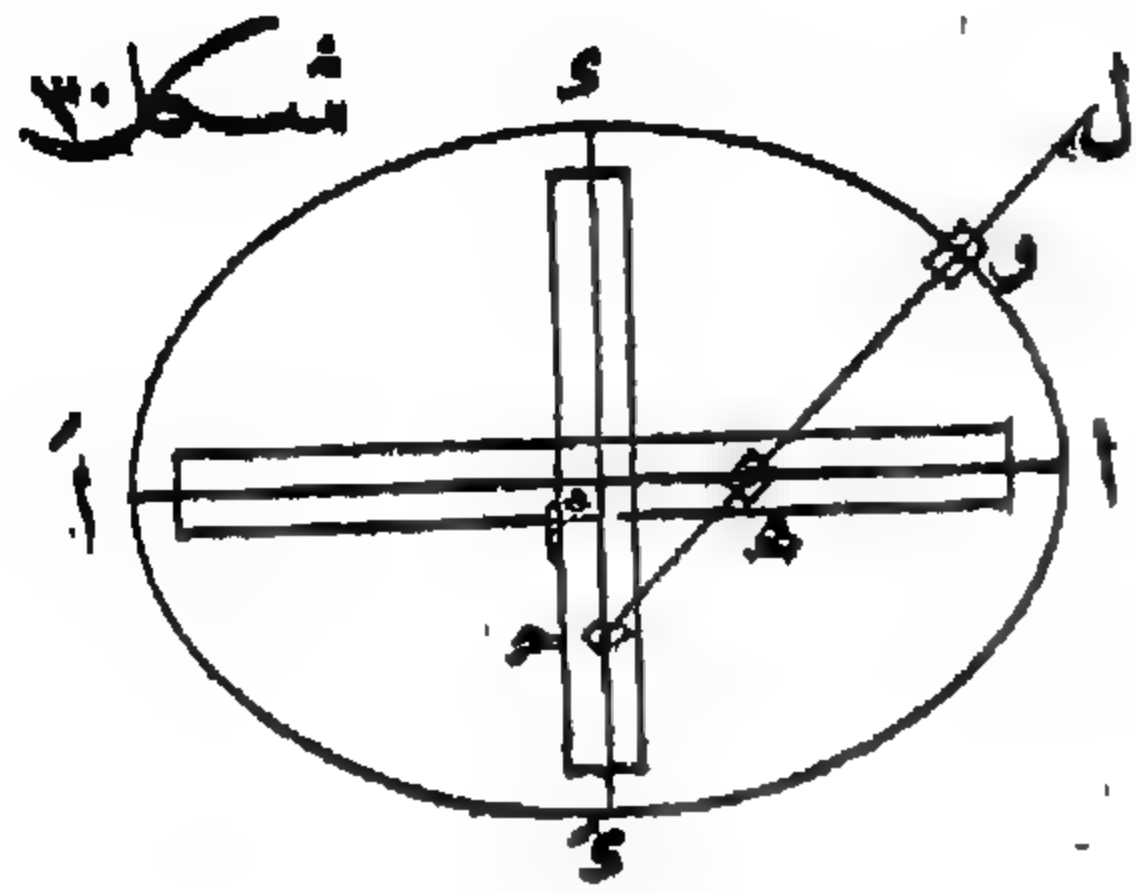
فاذا حرك الشريط أو المسطرة بشرط أن لا تخرج نقطة $هـ$ عن المحور $أ$
ونقطة $ح$ عن المحور $ب$ فبنا على ما ثبت فى س٢٤ يعلم أن نقطة $و$ تتحرك
على القطع الناقص فاذا علم بالقلم على سطح الورق الذى يراد الرسم عليه
مواضعها المختلفة المتتالية تحصلت عدة نقط على قدر اللزوم من القطع الناقص
فتجمع بمخن متصل ويكون هو المبنى المطلوب

ملحوظة مفيدة - حيث أنه اذا جعلت نقطة $ح$ مركزا ونصف قطر
مساو للفرق بين نصفي المحورين رسمنا قوس دائرة فإنه يقطع المحور الأكبر
بالضرورة فى نقطة $هـ$ بحيث اذا وصل من $ح$ الى $هـ$ بمستقيم واخذ عليه
بعد $هـ$ $و$ مساويا لنصف المحور الأصغر كانت نقطة $و$ من القطع الناقص
فحينئذ يمكن جعل هذه الكيفية طريقة لرسم القطع الناقص بتغيير مركز القوس
من نقطة $ح$ الى نقطة اخرى ومن هذه الى اخرى وهلم جرا حتى تتعين النقط
الكافية

س٢٤ برجل القطع الناقص - برجل القطع الناقص هو آلة بواسطة
يمكن رسم القطع الناقص دفعة واحدة بالاستمرار وهو مؤنس على النظرية
التي تقررت فى س٢٤ وهالك وصفا

يتركب هذا البرجل من مسطرتين عموديتين على بعضهما من وسطيهما
ومتربطتين ببعضهما ارتباطا ثابتا وبكل مسطرة منهما شق مصنوع فى وسطها

ومنه في جميع طولها بحيث عند رسم القطع الناقص توضع الآلة بشرط
ان يكون محور الشقين اللذين بالمسطرتين

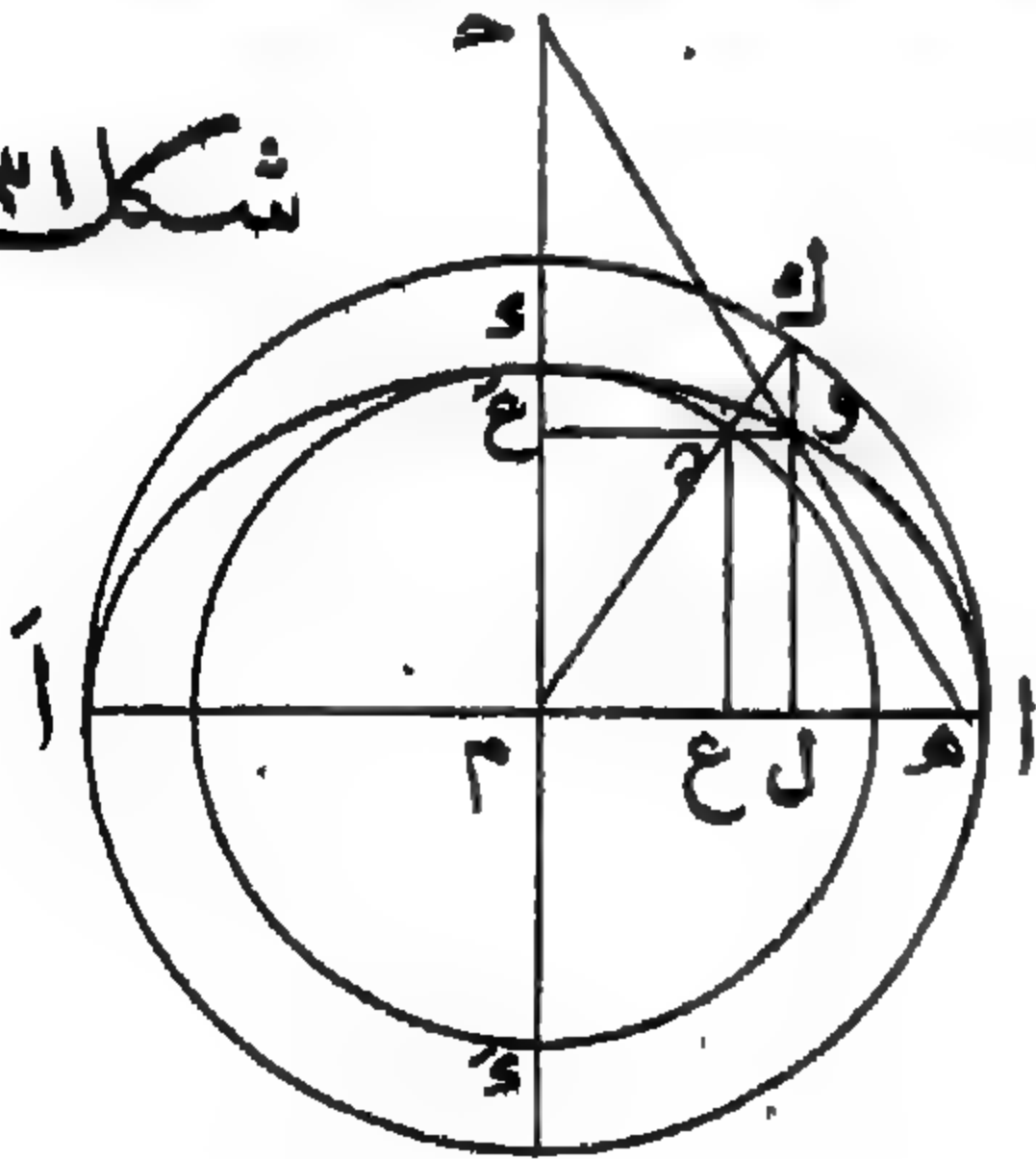


منطبقين على المحورين ا ا ر د و شكل ٣٠
من القطع الناقص الذي يراد رسمه ثم من
ذراع مثل ح ل عليه مقبضان مثل
و ه يمكن تشبيتهما في نقطتين حيثما اتفق
من الذراع وفي المقبض ه يوجب
أصبع أو سن ينزلق بطول شق المسطرة

ا ا واما المقبض و فان فيه محلا لتوضع سن قلم الرسم الذي به يرسم القطع
الناقص بتحرك الذراع ح ل ويوجد في النهاية ح من الذراع ح و حامل
ذو أصبع ينزلق في شق المسطرة د و فاذا ثبتنا المقبضين ه و بحيث صار
البعد ح و = م ا / ه و = م د ثم وضعنا المسطرتين بحيث يكون محور
شقيهما منطبقين على محوري القطع الناقص كما تقدم وحرك الذراع ح ل
فان نقطة ح لا تزال تتحرك على المحور د و ونقطة ه على المحور ا ا واما
نقطة و فانها ترسم بالضرورة قطعنا ناقصا وذلك بنا على سلك

شكل ٣١ (طريقة اخرى لرسم القطع الناقص بواسطة المسطرة أو شريط من ورق)
غاية هذه الطريقة ان يؤخذ شريط

شكل ٣١



من ورق أو مسطرة ويعلم عليها ثلاث
نقط مثل ه و ر ح شكل ٣١
بحيث يكون بعد ه و مساويا لنصف
المحور الأصغر د و وبعد و ح مساويا
لنصف المحور الأكبر ا ا من القطع الناقص
الذي يراد رسمه ثم تحرك المسطرة لكن
بشرط ان لا تخرج نقطة ح عن المحور

الأصغر وامتداده وان تتحرك نقطة ه على المحور الأكبر وامتداده ويعلم على سطح
الورق الذي يراد رسم القطع الناقص عليه جميع الاوضاع التي تأخذها نقطة و
فتكون هذه الاوضاع نقاطا من القطع الناقص

وفي الواقع لاننا اذا فرضنا ان القطع الناقص مرسوم من قبل بالطريقة المقررة
في شد بمعنى انه من بعد رسم نصف القطر $هـ$ ك انزلنا من نقطة $ك$
الراسي $ك$ ول ومن نقطة $هـ$ نرسم الافقي $ع$ $هـ$ والذي يقطع الراسي
المتقدم في نقطة $و$ التي تكون بموجب ما تقدم نقطة من القطع الناقص
فاذا رسم الآن من نقطة $و$ مستقيم كالمستقيم $ح$ وه صانع مع المحور الأكبر
للقطع الناقص زاوية مثل وهم مساوية للزاوية $ك$ $هـ$ الواقعة بين
ذلك المحور وبين نصف القطر كان هذا المستقيم صانعا بالضرورة مع المحور
الاصغر زاوية مثل $و$ $ح$ $م$ $=$ $ك$ $هـ$ $و$ يكون جزؤه الاسفل $و$ $هـ$
مساويا لنصف المحور الاصغر وجزؤه الاعلى $و$ $ح$ مساويا لنصف المحور
الأكبر

وفي الواقع لاننا اذا انزلنا من نقطة $هـ$ عمود $ع$ $هـ$ على $ا$ $ا$ حدث مثلث
 $هـ$ $ع$ $م$ القائم الزاوية في $ع$ مساويا للمثلث $و$ $هـ$ القائم الزاوية في $ل$
لان فيهما ضلع $هـ$ $ع$ $=$ $و$ $ل$ وزاوية $هـ$ $م$ $ع$ $=$ $و$ $هـ$ $ل$ بالعمل فتكون
الزاوية الثالثة $م$ $هـ$ $ع$ من المثلث الاول مساوية لتظيرتها $و$ $هـ$ من المثلث الثاني
وحينئذ فيكون مثلث $هـ$ $م$ $ع$ $=$ $و$ $هـ$ $ل$ ومن تساويهما يكون $و$ $هـ$ $=$ $م$ $هـ$ $=$ $م$ $و$
وهو برهان الجزء الاول

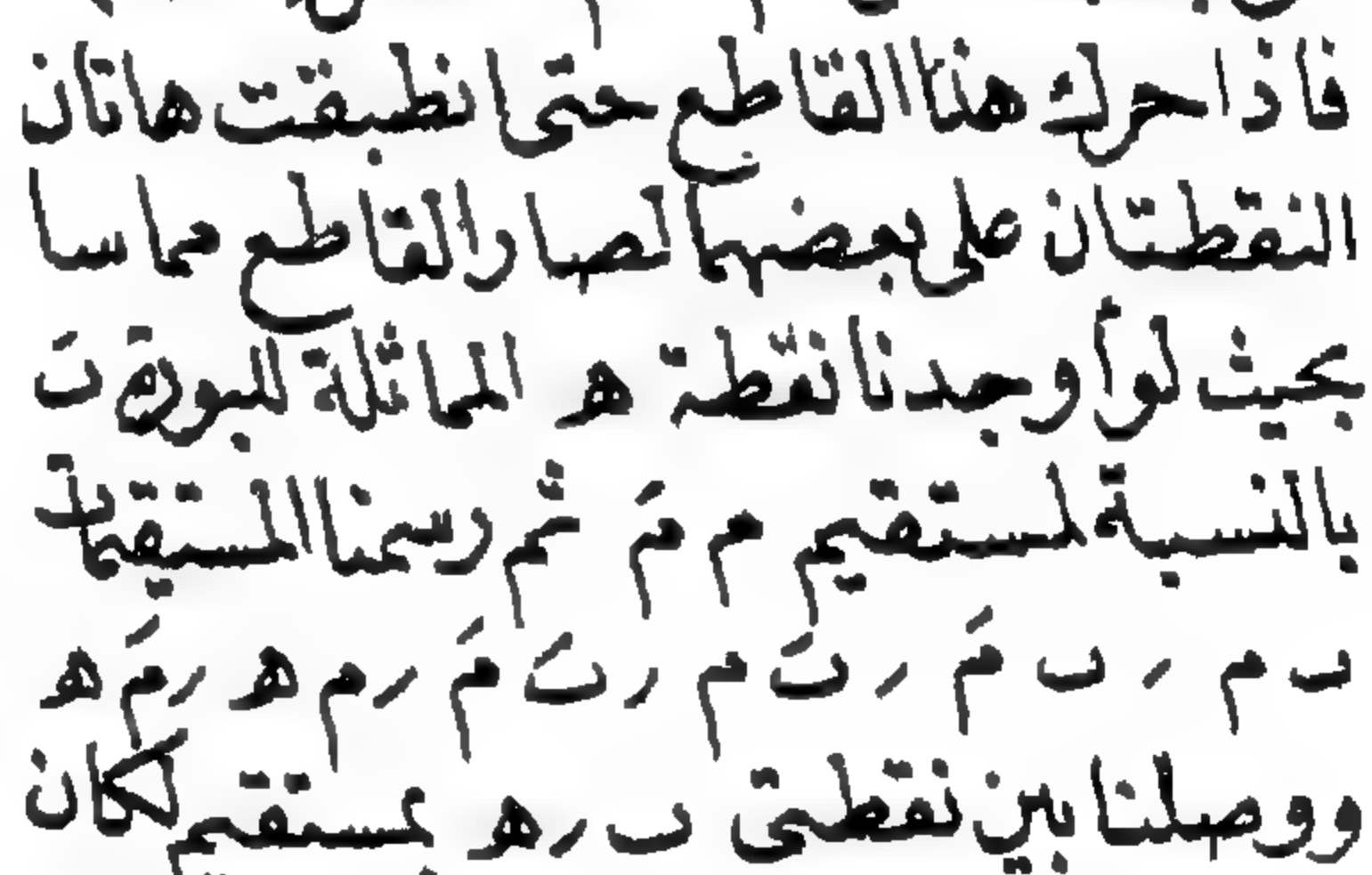
وثانيا اذا نظرنا الى مثلثي $ك$ $ل$ $م$ $ر$ $ح$ $ع$ $و$ القائم الزاوية وجدنا ان فيهما
ضلع $ل$ $م$ مساويا لضلع $و$ $ع$ وزاوية $ك$ $م$ $ل$ $=$ $و$ $ع$ فتكون الزاوية
الثالثة من المثلث الاول مساوية لتظيرتها من المثلث الثاني وعليه فيكون
هذان المثلثان متساويين وسيج من تساويهما ان $و$ $ح$ $=$ $ك$ $م$ $=$ $ا$ $م$ وهو
المطلوب الثاني

فاذا تصورنا ان نصف القطر انتقل من وضعه الى وضع آخر تعينت نقطة أخرى
من القطع الناقص حيث اذا رسم من تلك النقطة مستقيم صانع مع المحورين
زاويتين متساويتين للزاويتين الواقعتين بين نصف القطر $و$ وضعه الجديد
وبين المحورين المذكورين كان جزؤه الاسفل مساويا ايضا لنصف المحور الاصغر
وجزؤه الاعلى لنصف المحور الأكبر وهكذا

وبما ان هذه النظرية لا تزال موجودة في أي وضع اخذ المستقيم $ح$ $و$ $هـ$ المتغير

في المماس للقطع الناقص والعمودي عليه واقطانه

نشد النظر إلى السابعة - المستقيم المماس للقطع الناقص يصنع مع
نصف القطرين البوريين الواصلين إلى نقطة التماس زاويتين متساويتين
ولبيان ذلك يعتبر مستقيم قاطع لمحيط القطع الناقص في نقطتين قريبتين
من بعضهما مثل م م' شكل (٣٢)



هذا المستقيم قاطعا للقاطع م م في نقطة مثل ح ويكون المستقيمان
م م ه متساويين لكونهما مائلين متساويين البعد عن موقع العمود
م م ويكون كذلك المستقيمان م م ه وبناء على ذلك يكون الخطان المنكسران
ب م ه ب م ه مساويين الى الخطين المنكسرين ب م م ب م م بمعنى ان مجموع
طوليها مساو الى ٥٢ ولكن حيث كان مستقيما ب ه أقصر من كل من المنكسرين
ومستقيما هو ح ح ت لنفس هذا السبب المتقدم فيكون حينئذ

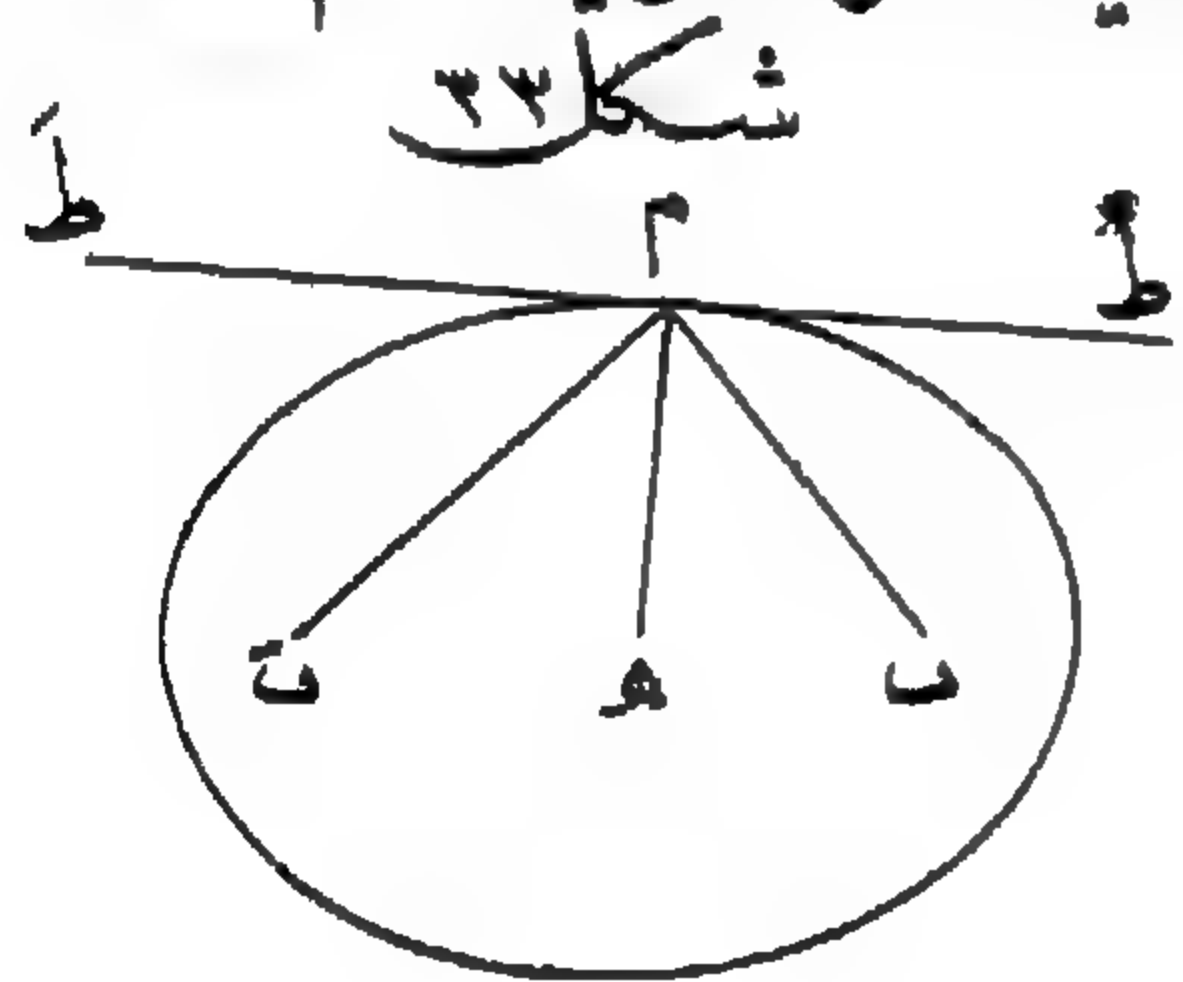
[illegible]

واخيرا ان يكون

وحيث تكون نقطة ح داخل محيط القطع الناقص وواقعة بين نقطتي م م مهما كان وضع القاطع وعلى هذا اذا تحركت هاتان النقطتان واقتربا من بعضهما الى ان تطبقا فنقطة ح تنطبق عليهما ويصير المستقيمان ح ب

ح ت نصف القطرين البورين لنقطة التماس
 اذا تقرر ذلك يلاحظ أنه في جميع أوضاع نقطة ح يكون مثلثا ح م ه
 ح م ت متساويين وبناء عليه تكون زاويتا م ح ه ر م ح م ح م
 متساويتين ايضا وغير ذلك حيث ان زاويتي م ح ه ر م ح م متساويتان
 لانهما متقابلتان بالرؤس فتكون زاويتا ح م ح م ح م متساويتين
 وهذا التساوي يحصل ايضا بالضرورة عند ما يصير القاطع م م مماسا
 وبذلك ثبت المطلوب

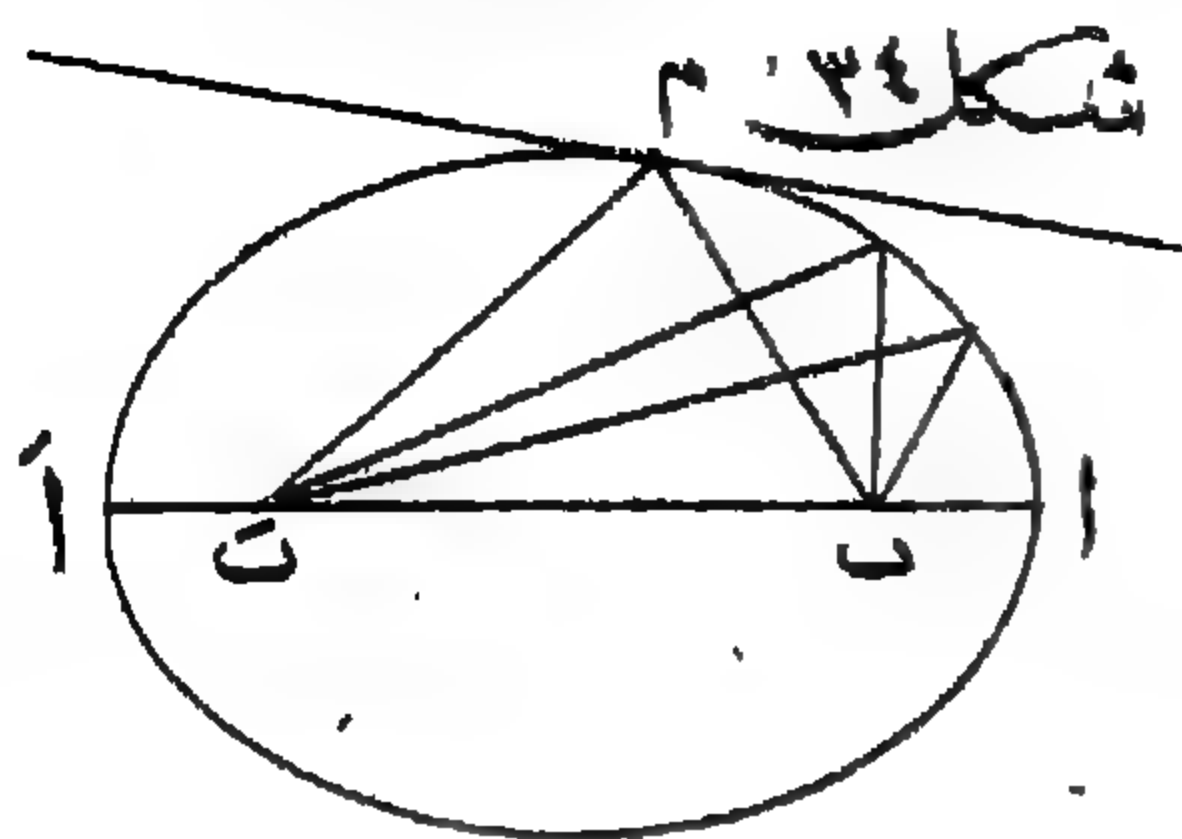
سعد نتيجة المستقيم العمودي على منحنى القطع الناقص في نقطة من محيطه
 يكون قاسم الزاوية الواقعة بين نصفي قطريها البورين الى قسمين متساويين
 مثلا ليكن ط ط شكل (٣٣) هو المماس للقطع الناقص في نقطة م
 فاذا رسم العمودي على المنحنى في هذه النقطة وهو م ه اقول ان هذا العمودي
 منصف لزاوية ب م ت وفي الواقع لانه ينتج من النظرية السابقة ان زاوية
 ط م ب ر ط م ت متساويتان وعليه تكون زاوية ب م ه المتممة
 لزاوية ط م ب مساوية لزاوية
 ت م ه المتممة لزاوية ط م ت
 وهو المطلوب



سعد (في المراتب الناقصة)
 خاصية القطع الناقص التي ذكرناها
 حالها السبب الوحيد في تسمية
 نقطتي ب ر ت بالبورين المتناظرين
 وذلك انه من المقرر في علم الطبيعة

انه اذا صادمت كرة مرنة حائزا مرنا ايضا تغير اتجاهها بعد المصادمة فتتبع
 اتجاهها آخر حيث تكون زاوية السقوط مساوية لزاوية الانعكاس بمعنى ان
 الاتجاهين اللذين تسير عليهما تلك الكرة قبل المصادمة وبعدها يصنعان مع
 العمودي المقام على سطح الحائز المرين من نقطة المصادمة زاويتين متساويتين
 وكذلك ينعكس كل من الاهتزازات الصوتية والاشعة الحرارية والضوئية
 تبعاً لنفس هذا القانون

فاذا تصورنا حينئذ قطعانا قصبا مصنوعا من شريط أو صفيحة قليلة العرض



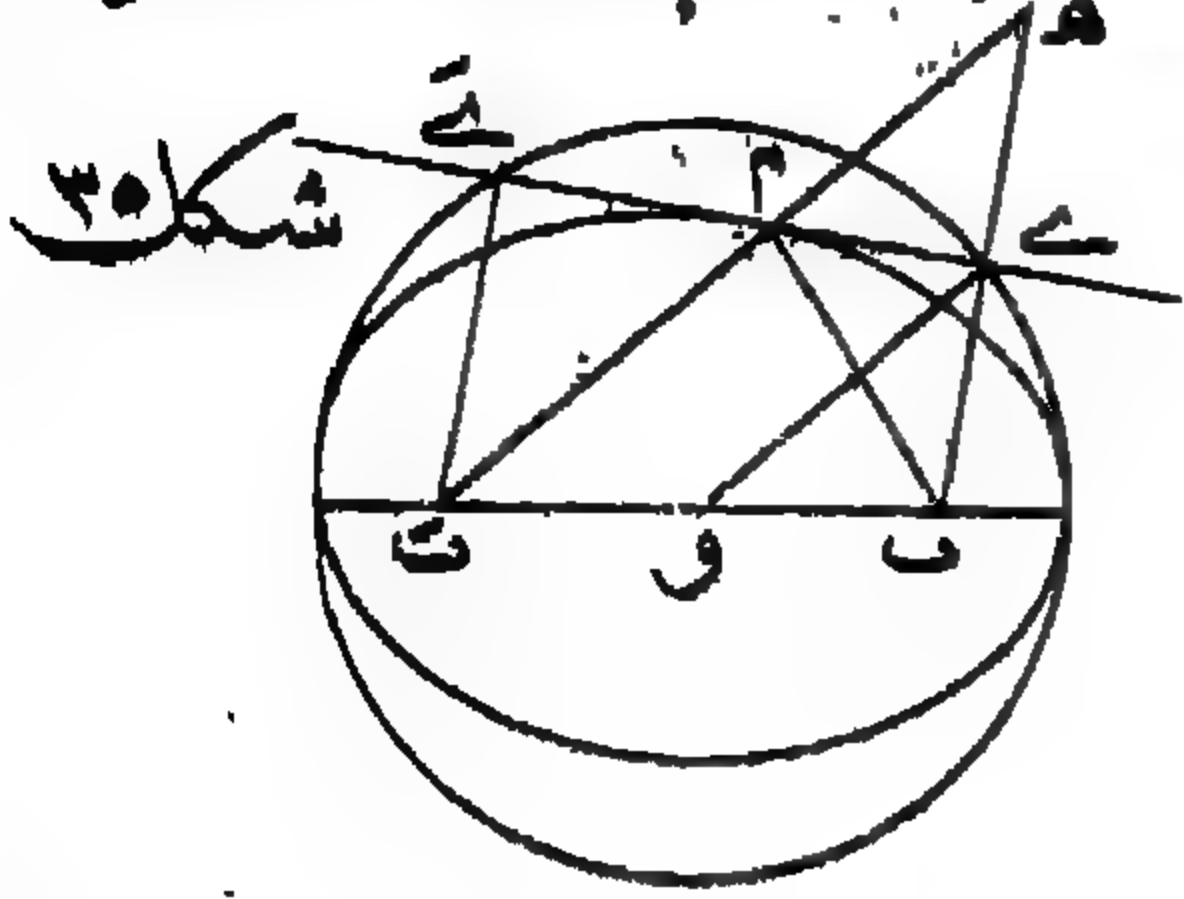
ماخوذة من جسم مرئي بمعنى انه صبار
تشكيل هذه الصفيحة على هيئة قطع
ناقص فصارت تشبه حرفا الصنيعة
ثم قذفت كرة مرئية من نقطة ب في اتجاه
حيثما اتفق مثل ب م شكل (٣٤)
فانها تمر بعد المصادمة بنقطة ت

وكذلك اذا فرض ان كرة اخرى قد قذفت من نقطة ت مرت بعد المصادمة بنقطة
ب وأيضا اذا ارتجج جسم ريان في نقطة ب انعكست ارتجاجاته الصوتية
على سطح القطع الناقص وتجتمع في نقطة ت بحيث يسمع الصوت في هذه النقطة
التر من غيرها وكذلك اذا فرض ان الصفيحة مصقولة من الداخل ووضع
في نقطة ب ينبوع حراري فان الاشعة الخارجة منه تجتمع بعد انعكاسها
على سطح هذه الصفيحة في نقطة ت بحيث اذا وضع الترمومتر في هذه النقطة
أظهر ان فيها درجة حرارة مرتفعة عن الدرجات التي في غيرها من النقط
وتكون الحرارة في نقطة ت كما لو كان ينبوع الحرارة موضوعا فيها ويحصل مثل
ذلك ايضا اذا كان ينبوع موضوعا في نقطة ت والترمومتر في نقطة ب
فلجميع هذه الاسباب قد سميت نقطتا ب ت بالبوريتين المتناظرتين
واذا وضعت في نقطة ب نقطة ضوئية فان الاشعة الخارجة منها
تنعكس على الحواف الناقصة وتجتمع في نقطة ت بحيث ان العين الموضوعة
في نقطة ت تحس بالضوء كما اذا كانت النقطة المضيئة موجودة في
نفس هذه النقطة

٥٣ النظرية الثامنة - المحل الهندسي لمساقط بورتي قطع ناقص على
جميع المماسات لمحيطة هو محيط دائرة قطرها المحور الأكبر لهذا القطع الناقص
لانه لا يخفى ولا ان مسقط نقطة على مستقيم هو موقع العمود النازل منها
على هذا المستقيم

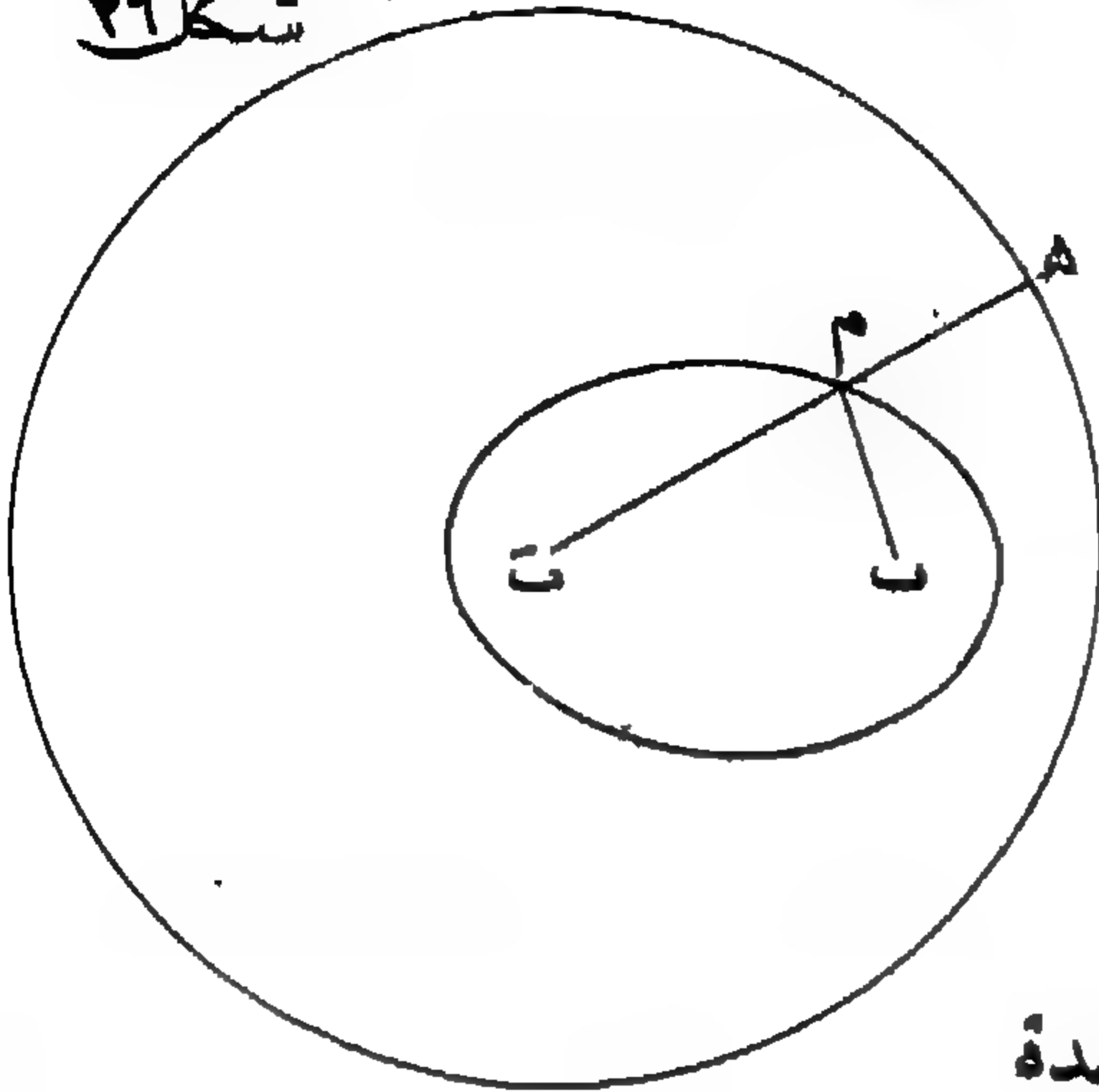
فاذا تقر هذا ينزل من البورت ب شكل (٣٥) عمود مثل ب م على تماس
حيثما اتفق مثل م م ويمد على استقامته حتى يتلاقى مع نصف قطر البورت

ت م في نقطة مثل نقطة ه فيكون خطا م ب ر م ه متساويين
 لان المماس منصف لزاوية ب م ه
 بمقتضى (سند) وعلى هذا يكون طول
 المستقيم ت ه مساويا الى ٢ ٢
 لكن من حيث ان خط و م الواصل
 من مركز القطع الناقص الى مسقط
 البؤرة على المماس ما زال ينصف كل من



ت ر ه اللذين هما ضلعا المثلث ت ب ه فيكون حينئذ هذا الخط
 موازيا الى ضلعه الثالث ومساويا لنصف طوله بحيث يكون و م = ٢
 وعلى هذا يكون بعد نقطة م التي هي مسقط البؤرة عن مركز القطع الناقص
 ثابت الطول ومساويا لنصف المحور الأكبر وهذا تثبت النظرية المتقدمة
 وهذه الدائرة تسمى غالبا بالدائرة الاصلية للقطع الناقص ومن المصادفات
 مساوية للدائرة التي مسقطها هو القطع الناقص كما في (سند)
 سند في دائرة الاستدلال - دائرة الاستدلال هي دائرة معرفتها مهمة
 جدا لانها تستعمل كثيرا في رسم مماسات القطع الناقص وهي الدائرة التي ترسم
 بجعل إحدى بؤرتي القطع الناقص مركزا ونصف قطر مساويا الى ٢ ٢
 وبناء على ذلك يعلم انه يوجد لكل قطع ناقص دائرة استدلال تتميزتان
 سند تعريف آخر للقطع الناقص - من المعلوم ان بعد أي نقطة عن محيط
 دائرة يجب على المستقيم الواصل من تلك النقطة الى مركز هذه الدائرة
 فاذا تقرر هذا فلتكن نقطة م (شكل ٣٦) نقطة حيثما اتفق من محيط القطع
 الناقص ويوصل منها الى البؤرتين بنصفي القطرين البوريين ب م ر م
 اللذين يمتد ثانيا فيهما على استقامته حتى يتلاقيا مع دائرة الاستدلال التي
 مركزها نقطة ت فيكون بالضرورة م ه = م ب
 وعلى هذا يري ان نقطة م متساوية البعد عن كل من نقطة ب ومحيط هذه
 الدائرة فيمكن حينئذ ان يعرف القطع الناقص بتعريف جديد بأن يقال القطع
 الناقص منحن جميع نقطه متساوية البعد عن محيط دائرة وعن نقطة موضوعة
 داخلها

مستد قد يمكن بالتسوية ان تستخرج من هذا التعريف طريقة جديدة لرسم
القطع الناقص لكنها تكون اقل
بساطة وسهولة من الطرق التي
ذكرناها قبل الآن فلذا لم نطل
الكلام عليها زيادة عن ذلك
مستد النظرية التاسعة

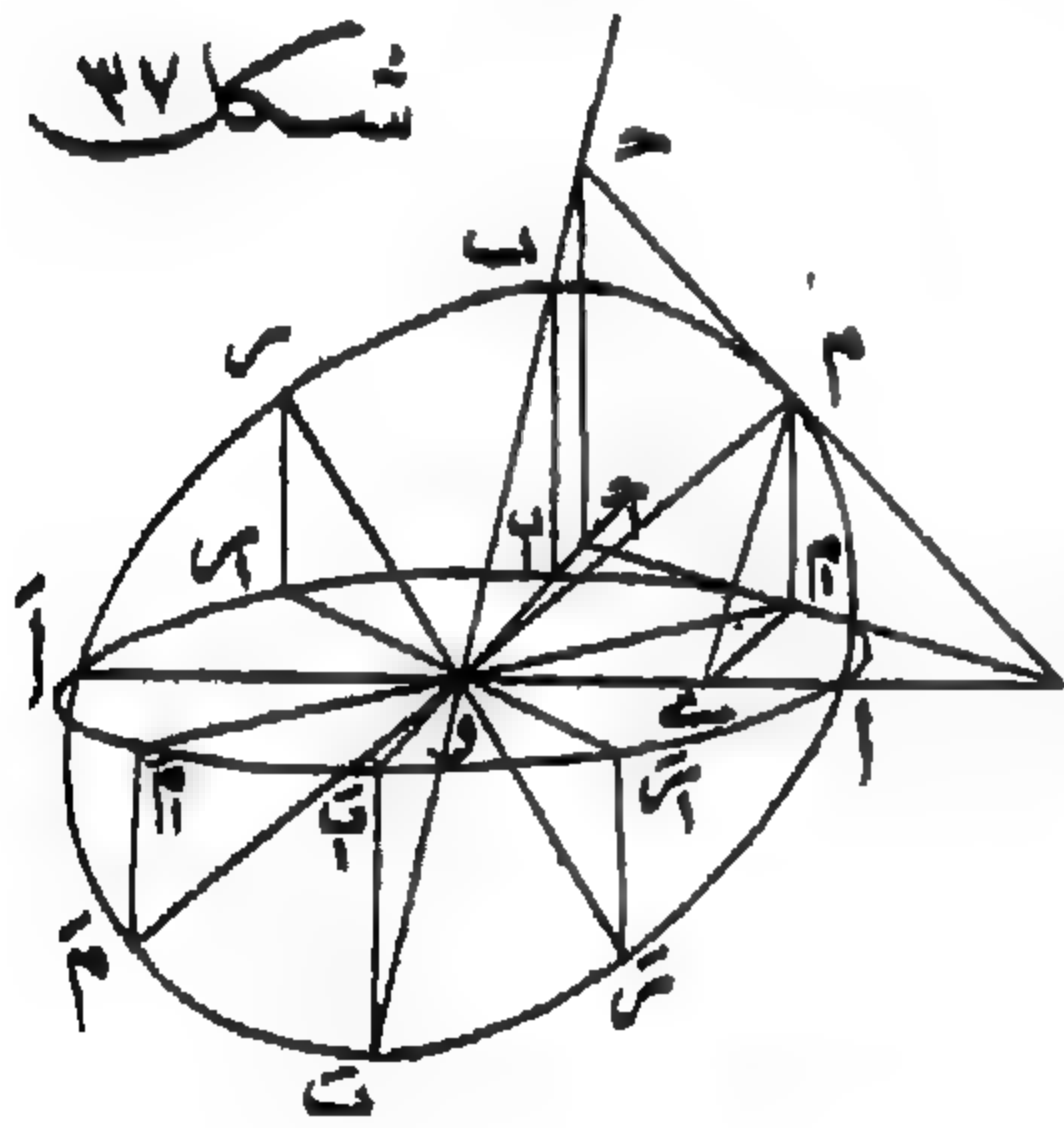


اذا رسم مستقيمان مماسان
للقطع الناقص ولداثرتيه الاصلية
في نقطتين مسقطهما على المحور
الاكبر واحد كان هذان المماسان

متوازيين مع هذا المحور في نقطة واحدة

ولا يثبت ذلك فعتبر الدائرة ا ب ا ب (شكل ٣٧) التي مسقطها هو القطع

شكل ٣٧



الناقص ا ب ا ب كما في (شكل ٣٧) ونفرض
ان نقطة م نقطة من الدائرة وان نقطة م
هي مسقطها فيكون حينئذ مسقط المماس
للدائرة وهو م ط مماسا للقطع الناقص
في نقطة م لكن من حيث ان هذا المماس
الاخير يلزم ان يكون بالضرورة ما رابطة
ط التي هي نقطة تقابل مماس الدائرة بمستوى
المسقط وهذه النقطة لا يمكن وجودها الا
على المحور ا ا الذي هو خط تقاطع المستويين

فنعلم حينئذ ان هذين المماسين تلاقيان في نقطة واحدة على المحور
فاذا طبق الآن مستوى الدائرة على مستوى المسقط انطبقت هذه الدائرة
على الدائرة الاصلية للقطع الناقص واخذ مستقيمان م م الاتجاه م م
بشرط ان يكون مسقط نقطتي م م على المحور الاكبر واحدا فمن حيث
ان نقطة ط لم تتغير موضعها لانها موجودة على محور الدوران يثبت المطلوب
حينئذ من ان المماسين لا يزالان متلاقين في هذه النقطة وهذا هو ما اردنا بيانه

مشهد وهذه الخاصية توجد أيضا بالنسبة الى المحور الاصغر في حالة ما اذا اعتبرنا نقطتين مسقطهما على هذا المحور واحد احدهما من نقط القطع الناقص والاخرى من نقط الدائرة التي قطرها المحور المذكور

فاذا فرض مثلا ان وره شكل (٣٨) نصف قطر حيثما اتفق ثم رسمنا مماسي هـ ط ، برك المتوازيين لكل من الدائرة الاصلية والدائرة المرسومة على المحور الاصغر حدث من ذلك

مثلثان متشابهان ينتج منهما هذا التناسب

وط : و ك :: و هـ : و ر :: ن : ن

وفي هذا التناسب ن ، ن و ر و ن

لنصف المحورين

فاذا وصل الآن مستقيم ط ح

وانزل مستقيما من عموديا على

المحور الاصغر حدث بالضرورة هذا

التناسب الآتي

م : م :: و ط : و ك :: ن : ن

وبناء على ذلك تكون نقطة م بمقتضى بند (٤٤) نقطة من القطع الناقص لكن حيث ان مستقيم ط م هو بمقتضى النظرية السابقة المماس لهذا القطع الناقص في نقطة م فحينئذ يعلم ان هذا المماس متلاق مع المماس ك ر على امتداد المحور الاصغر وهذا هو ما اردنا بيانه

(تنبيه) يستنتج من البرهان السابق ومن القضايا المبرهنة في بندي

(٤٢) و (٤٣) ان المستقيم هـ م عمودي على المحور الأكبر

ويمكن التعبير عن هاتين الخاصيتين المجهتين جدا في العمل المنطوق واحد وهو

المنطوق الآتي

اذا علم قطع ناقص والدائرة التي قطرها احد محوريه اقول ان مماسي هذين

المنحنيين في نقطتين مسقطهما على المحور المشترك واحد يتقاطعا في نقطة

واحدة على هذا المحور المشترك

٥٩ نتيجة -- نصف المحور في القطع الناقص هو وسط متناسب بين البعدين
الواصلين من مركزه الى مسقط نقطة تماس أى مماس كان على المحور والى نقطة
تقابل هذا المماس بالمحور المذكور

وفي الواقع لأنه ينتج من مثلث وهط القائم الزاوية أن
 $\text{وه} = \text{وآ} = \text{وس} \times \text{وط}$

وبالمثل ينتج من مثلث OMC ومرجح القائم الزاوية أن

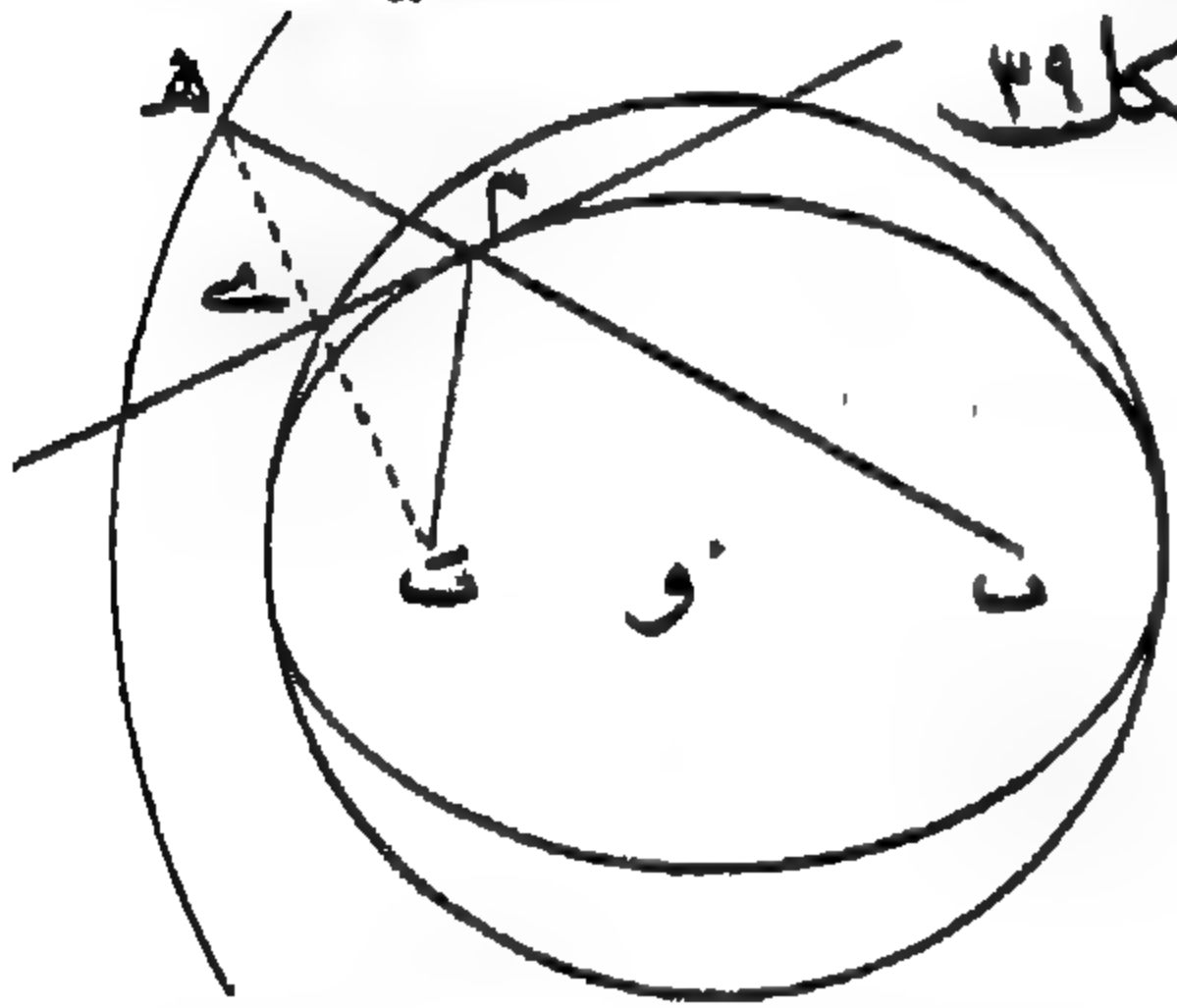
وَمَرْ = وَء = وَس = X وَح

سند (في مريم مما سات القطع الناقص) الخواص المتنوعة التي ذكرناها آنفا
تساعد على إيجاد طرق هندسية بسيطة جدا لحل الثلاث مسائل الاصلية التي
توجد في البحث عن مما سات القطع الناقص

المسئلة الاولى

المطلوب رسم مستقيم مما سيقطع ناقص من نقطة معلومة على محيطه

شک ۴۹



الطريقة الأولى) لتكن نقطة م
شكل (٣٩) هي النقطة المعلومة

فأقول إذا وصل ب م ر ت م كان
المماس المطلوب هو المستقيم النصف

لزاویه تَم هـ

وحيث في سهل الجباده بتنصيفها

لاغير لکنہ ممکن الاستغناء عن ایجاد

هذا المستقيم المنصف للزاوية برسم دائرة الاستدلال والدائرة الاصلية

وبعد ذلك يكفي ان نمد مستقيم ب م حتى يتقابل مع محيط دائرة الاستدلال

في نقطة مثل هـ ثم نصل مستقيماً بـ هـ فيكون المماس المطلوب هو المستقيم

الواصل من نقطة م الى نقطة ن التي هي نقط تقابل مستقيم ت ه محيط

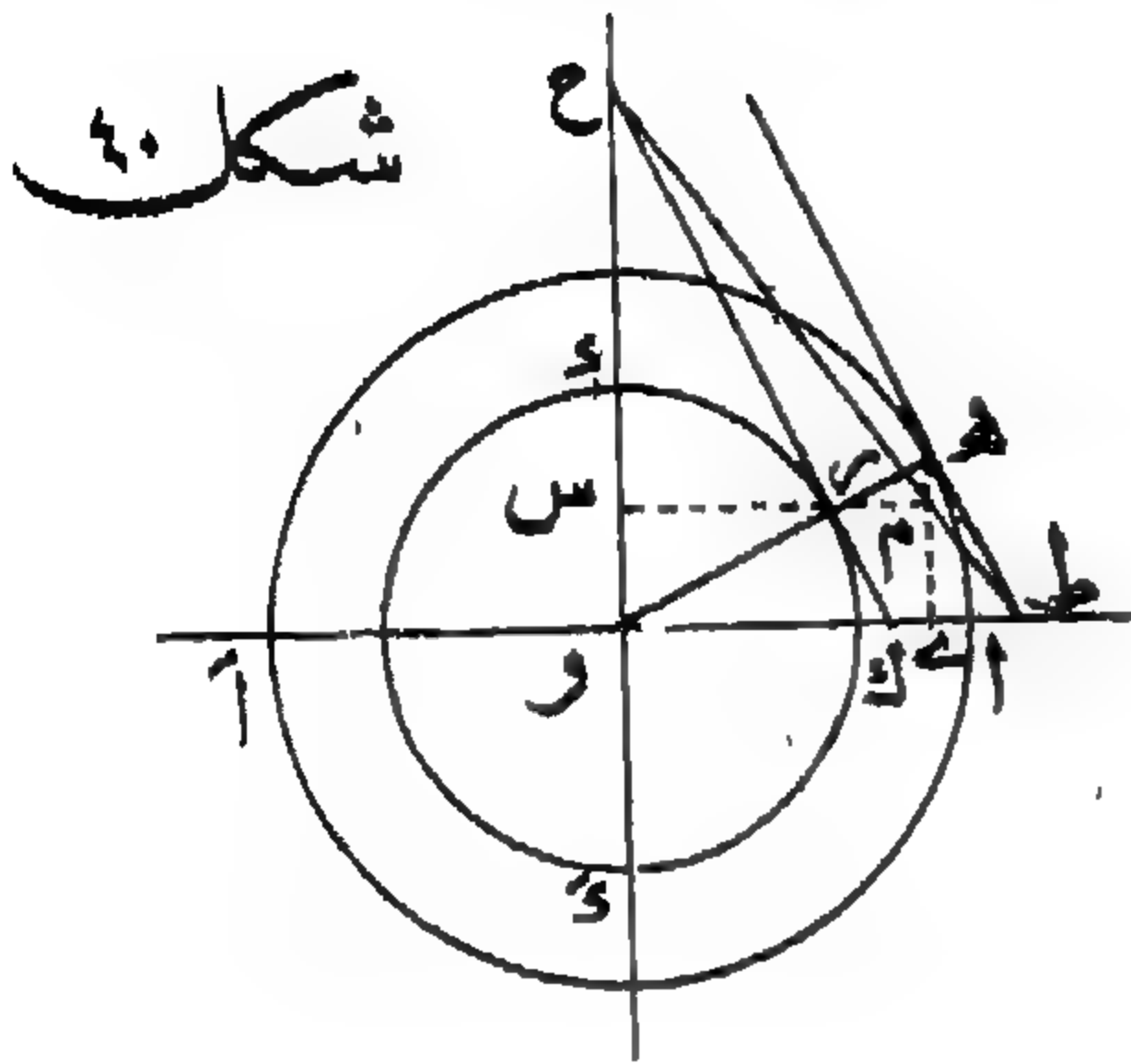
الدائرة الأصلية

(الطريقة الثانية) ينتج من النظرية التاسعة المذكورة في § ٥٧ طرقاً أخرى

الحل نفس هذه المسئلة فمثلا لتكن نقطة م شكل (٤٠) هي النقطة المعلومة

فیروز

فيتر احدث هذه النقطة وهو م ثم يمد على استقامته حتى يتلاقى



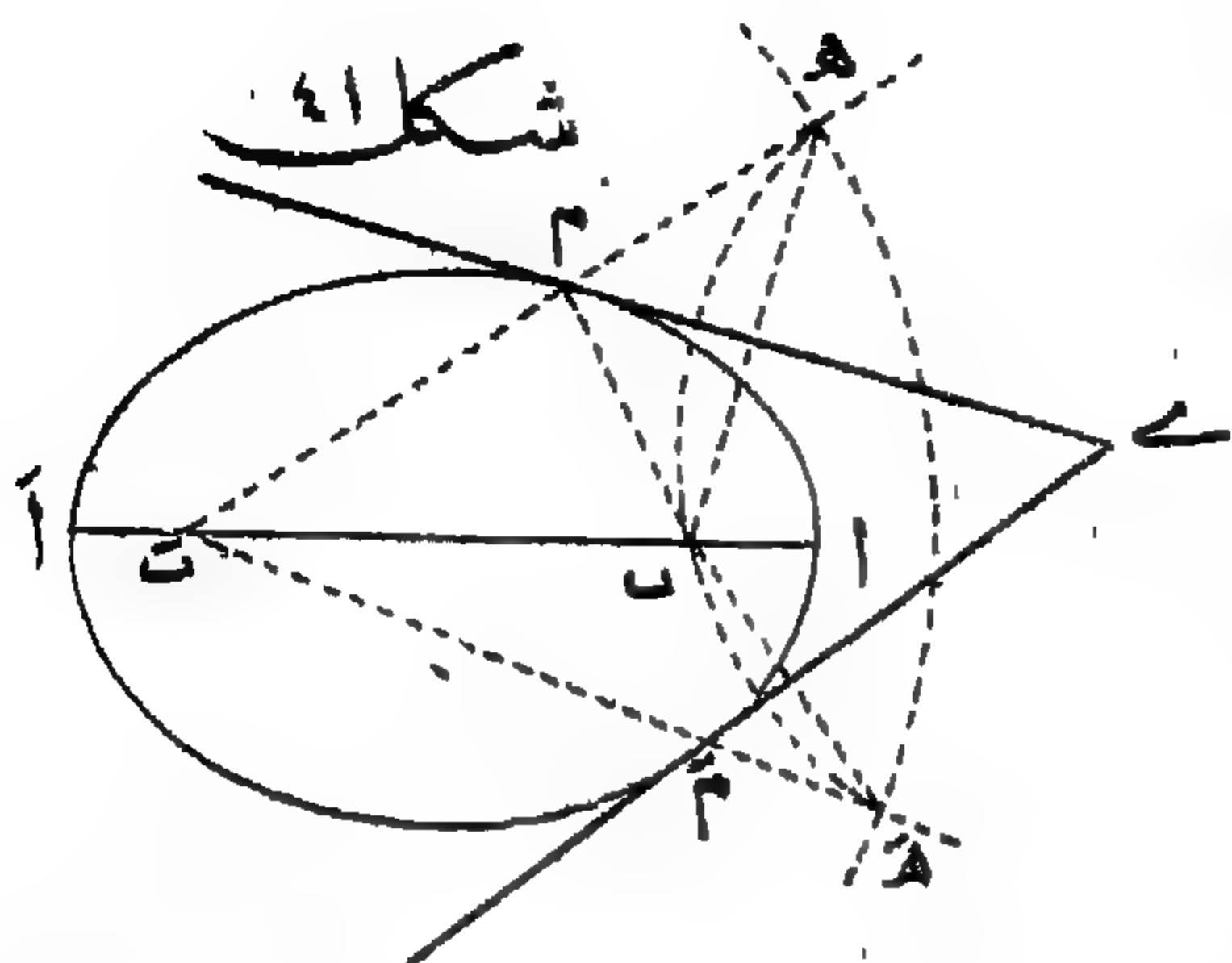
مع الدائرة الاصلية في نقطة مثل
نقطة هـ ويرسم من هذه النقطة
مستقيم مماس لهذه الدائرة فهذا
المماس يقطع المحور اا في نقطة مثل
نقطة ط اذا وصل منها الى نقطة
م بمستقيم ط م كان هو المماس
المطلوب

من الجائز ان تقع نقطة ط بعيدة
جدا فيترتب على ذلك تقاطع المستقيمين

ا ا و هـ ط على زاوية حادة جدا فلا تتعين نقطة تقاطعها بالضبط اوريا
وقعت النقطة المذكورة خارج حدود الرسم بالكلية ففي كلتا هاتين الحالتين
تستعوض الدائرة الاصلية بدائرة قطرها المحور الاصغر ويستعوض الاحداث
م م بالاحداث م م من العمودي على المحور الاصغر والمماس هـ ط بالمماس
سح

المسئلة الثانية

سند المطلوب رسم مستقيم مماس للقطع الناقص من نقطة خارجة عنه
(الطريقة الاولى) يفرض ان المسئلة محلولة وان نقطة م هي النقطة للعلومة
شكل (٤١) وان م هو المماس المطلوب وان م هي نقطة تماسه بالمخني
فاذا وصل مستقيم م م و مد على استقامته حتى يتلاقى في نقطة مثل هـ
مع العمود النازل من البوق ب على المماس كان بعد ب هـ مساويا الى ٢ ٢
وحينئذ تكون نقطة هـ موجودة على محيط دائرة الاستدلال التي مركزها
هو نقطة ب وغير ذلك من حيث ان المماس عمودي على منتصف المستقيم
ب هـ فيكون البعدان م ب م هـ متساويين وحينئذ تكون نقطة هـ هي
نقطة تقاطع دائرة الاستدلال مع الدائرة المرسومة بجعل نقطة م مركزا
وبعد م ب نصف قطرها ومتى تحسنت نقطة هـ بهذه الوسيلة فلا يبقى
علينا سوى ان نتر من نقطة م عمودا على ب هـ او نصل من نقطة م



الى نقطة تقابل المستقيم ب ه
 بالدائرة الاصلية فيكون العمود
 المنزل أو المستقيم الموصول بهذه
 الكيفية هو المماس المطلوب
 واما من خصوص نقطة التماس
 فهي نقطة تقابل المماس مع المستقيم

وحيث ان محيطي الدائرتين

يتقاطعان على العمود في نقطتين فتوجد حينئذ نقطة تقاطع أخرى مثل هـ

ولیزہ بنا علی ذلک وجود مما سائر مثل مے م

بشروط لا يمكن حل هذه المسئلة ان تكون النقطة للعلومة موضوعة خارج القطع
الناقص لان دائرة الاستدلال والدائرة التي مركزها نقطة π لا يمكن ان
يكونا خارجيتين عن بعضهما حيث ان الثانية منهما مارة بنقطة β الكائنة
داخل الاولى وحيث انه لاجل تقاطع محيطي دائرتين يلزم ان يكون البعد بين مركزيهما
اكبر من فاصل نصفي قطريهما اعني يكون

مے تکتے تھے۔۔۔ او

$$R_2 = H_2 \leq \omega_1 + \omega_1$$

وهذا هو الشرط المقرر في بند (٢٩) الذي يدل على ان نقطة ٤ موضوعه خارج المنحنى

(الطريقة الثانية) لنفرض ان المسئلة محلولة وان نقطة r هي النقطة المعلومة وان r هو المماس المطلوب الذي نقطة تماسه بالمحني هي نقطة m شكل (٤٢) في رسم العمود mr ويمد حتى يتلاقى مع الدائرة الاصلية في نقطة مثل نقطة h ثم يوصل المستقيم hr فيكون ممقتضى بند (٥٧) هو المماس لهذه الدائرة في h هذا المماس حتى يتلاقى مع احد اثني نقطة r في نقطة مثل نقطة s ويحدث

سن ل : نمر ل : ه ه : م م : ن ن : ن

وبذلك يسهل رسم نقطة S لانه اذا وصل المستقيم SR ومد الى A

نقص



يقطع المحور ١١ في نقطة ك
ثم وصل مستقيم ك س حدث
ح و د و ه س ل ن ر ك ه
لكن بما ان بعد د وهو عين ه
فيكون بنا على ذلك ح ومساويا
الى ه اعني ان نقطة ح هي
من نقطة الدائرة الاصلية
وتنزل طريقة العمل الى ما سيأتي

وهو ان نصل من النقطة المعلومة الى رأس المحور الاصفر مستقيم ويمد هذا المستقيم حتى يتلاقى مع المحور الأكبر ثم يوصل من نقطة تقابلها وهي ك الى نقطة ح التي هي نقطة تقابل الدائرة الأصلية بامتداد المحور الاصفر فتحصل بنا على ذلك نقطة س وهي نقطة تقاطع المستقيم ك ح مع احدائى نقطة مر وأخيرا يرسم من نقطة س مستقيم مماس للدائرة الأصلية كالمستقيم س هـ فلا يبقى جيتذ سوى أن يوصل المستقيم ط م فيكون هو المماس المطلوب وتكون نقطة تقابله مع الاحدائى هـ هي نقطة تماسه بالمخفى واما المماس الثانى للدائرة الأصلية للرسم من نقطة س أيضا فانه يعين المماس الثانى للقطع الناقص

ويمكن استعراض هذه الاجراءات عند النزول باجراءات أخرى مشابهة لها بالكلية انما يستعرض فيها المحور الأكبر بالمحور الأصغر فقط



المسلة الثالثة

٦٢ شد المطلوب رسم مستقيم مماس
لقطع ناقص ومواز لاجتاه معلوم
(الطريق الأولى) لنفرض ان L ك
هو الاجتاه المعلوم كما في شكل (١٣) α
ونفرض ان Q قد صار حل المسئلة وعلم
ان S ط هو المماس المطلوب

فاذا انزلنا من نقطة ب عمودا مثل ب هـ على المستقيم المماس لكان عمودا
أيضا على ما يوازيه وهو ل ك وحينئذ يكون هذا العمود معين الوضع ولا شك
فإن نقطة هـ توجد أيضا على دائرة الاستدلال التي مركزها نقطة ب
وحينئذ فيسهل تعيين هذه النقطة ثم بعد ذلك يتم العمل كما في (الطريقة الأولى)
من المسئلة السابقة

وحيث أن المستقيم يقابل محيط الدائرة في نقطتين فيوجد حينئذ مماس
 ثانٍ للقطع الناقص مثل المماس ط س موف للشرط المقرر في منطوق هذه
 المسئلة التي تكون دائماً ممكنة الحل لكون المستقيم ب هـ ما را بنقطة ب الكائنة
 داخل دائرة الاستدلال

(الطريقة الثانية) لنفرض ان المسئلة
محلولة وان m ط هو المماس المطلوب
فاذا مد الاحداث m حتى يتلاقى
مع الدائرة الاصلية في نقطة مثل h
شكل (٤٤) لكان المستقيم h ط
بمقتضى بند (٥٧) مماسا للدائرة
المذكورة وتوّل المسئلة حينئذ الى البحث
عن مستقيم مماس للدائرة الاصلية
اذا كان اتجاه المستقيم h ط معلوما

ولاجل تعيين هذا الاتجاه نذ من نقطة ر مستقيما موازيا الى الاتجاه المعلوم
كالاستقيم ول ثم نرسم من نقطة ل مستقيما موازيا الى هـ فيحدث من
مثلثي و د ر و ع م ط أن

وہ : مے : : ول : طے

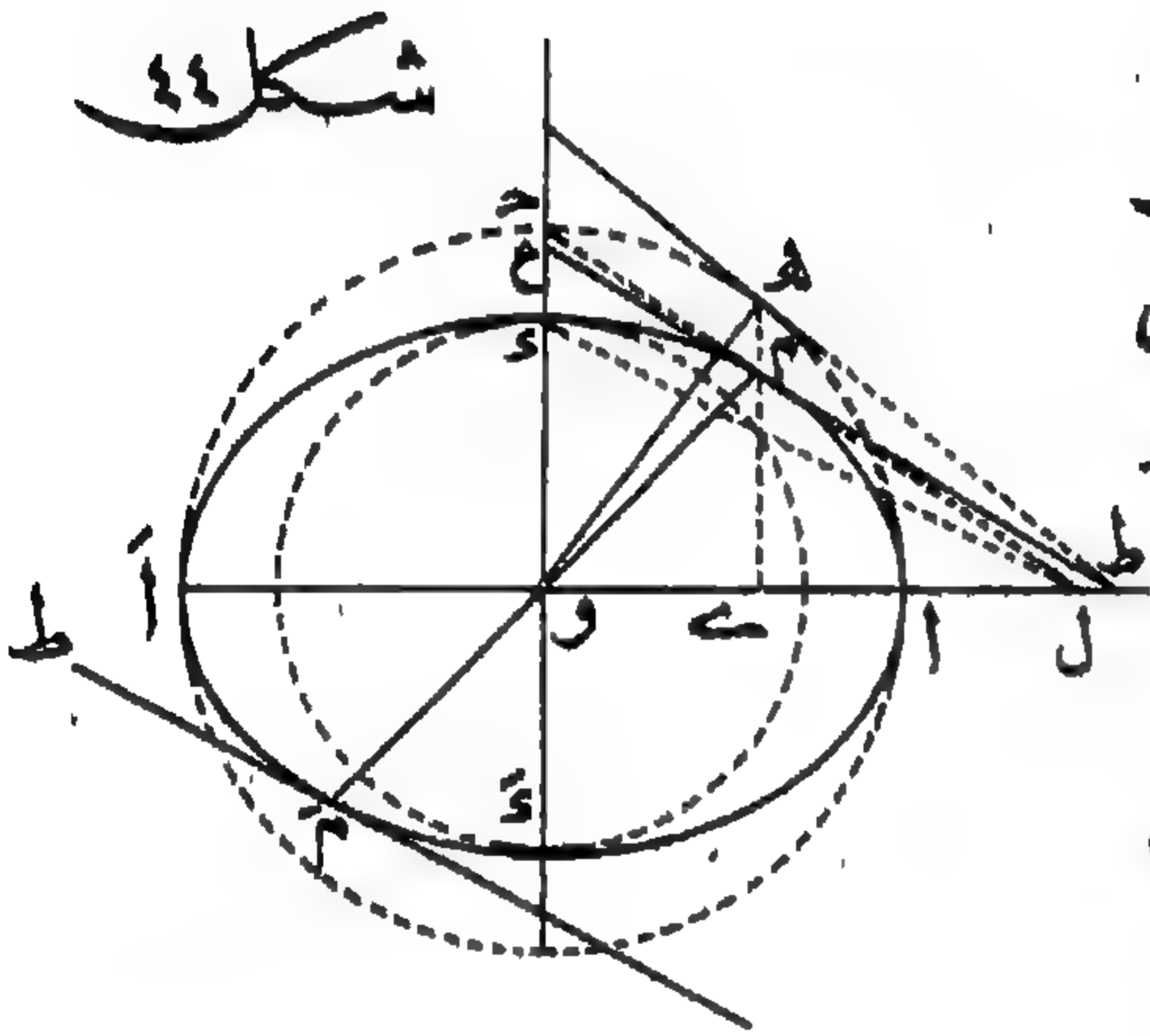
ومن جهة اخرى يتج من تشابه مثلثي وحل رے خط أن

وحر: ھے :: ول: طے

وَبِنَا عَلَيْهِ يَكُونُ

وہ: م: ے :: وح: ھ: ے

فاذا غيّرنا الوسطين ببعضهما يحدث



ور : وح : م : هـ : هـ : ر : ر :

لكن بما ان مستقيم $ود = ر$ فيكون $وح = ر$ ويلزم حينئذ ان تكون نقطة $ح$ موجودة على الدائرة الاصلية

ومن ذلك تنبع الطريقة الآتية وهي ان نمد من نقطة $ر$ مستقيم $ول$ موازيا للاتجاه المعلوم ويوصل المستقيم $لح$ ثم يرسم المستقيم $هـ ط$ مماسا للدائرة الاصلية وموازيا الى المستقيم $لح$ ويرسم اخيرا من نقطة $ط$ مستقيم موازيا للاتجاه المعلوم فيكون هذا الموازي هو المماس المطلوب للقطع الناقص ونقطة تماسه تكون موجودة على الاضداد $هـ م$

وحيث انه يمكن رسم مستقيمين مماسين للدائرة الاصلية وموازيين للمستقيم $لح$ المعلوم فيكون حينئذ لهذه المسئلة حلان

ويشاهد بالسهولة ان نقطتي تماس كل مماسين متوازيين من مماسات القطع الناقص تكونان متماثلتي الوضع بالنسبة الى مركزه

وفي الواقع كذلك لاننا اذا تصورنا دوران الشكل في مستوى دورانا رحويا بقدر ١٨٠ حول نقطة $و$ شكل (١٤٣) لصار المماس الذي هو $س ط$ بعد الحركة موازيا الى $ل ك$ وبنأ على ذلك يلزم ان يأخذ وضع المماس $ط س$ وفي اثناء نفس هذه الحركة ينتقل نصف القطر $وم$ ويصير على استقامته الاولى وعلى ذلك يكون المستقيمان $وم$ و $م$ على استقامة واحدة

وقد تقدم في بند (٣٧) ان كل مستقيم منتهى الطرفين بمنحني القطع الناقص ومار بالمركز يكون منصفهما بالمركز المذكور اعني مقسوما به الى قسمين متساويين

سند (تبسيط) من المهر ان يلاحظ ان الطرق التي ذكرناها لحد الان لرسم مماسات القطع الناقص لا يحتاج فيها لان يكون منحنى القطع الناقص مرسوما من قبل ولا شك

ان هذه مزية عظيمة لانه من الضروري عند رسم أي قطع ناقص نقطة فنقطة ان يبحث عن المماسات له في النقط التي تتميز اولا فاولا لان هذه المماسات تبين

لرسم هيئة المنحنى وترشده عند ما يريد جمع هذه النقط ببعضها بل وتجعله يكتفي بوجود القليل من نقط المنحنى لكن بشرط ان تكون معينة بالضبط الكلي

ومن المشاهد ايضا ان الافضل استعمال الطرق الاولى من المسائل المتقدمة في حالة ما اذا كان جرى رسم المنحنى بطريقة رسمه الاولى المذكورة في بند (٣٠)

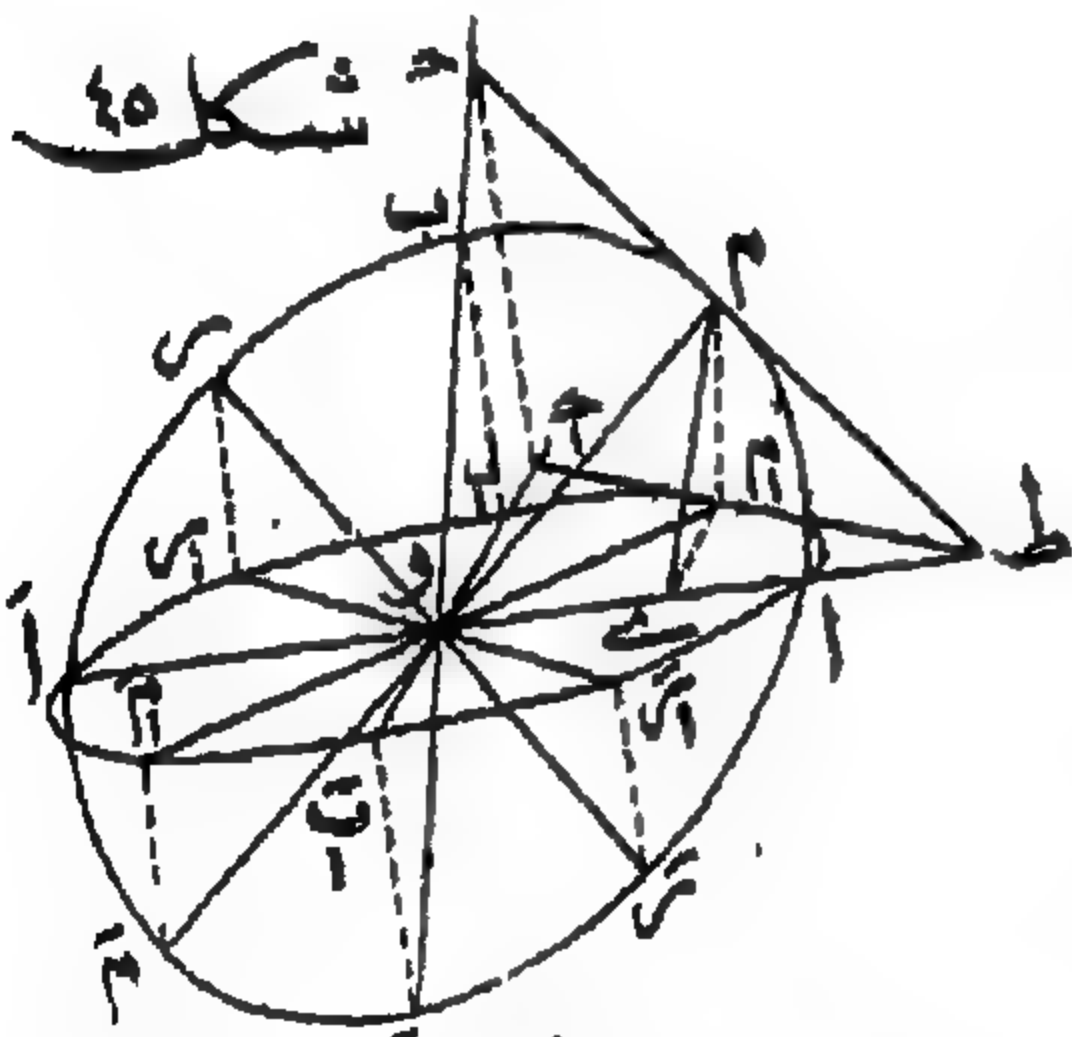
وأما الطرق الثانية فأنها تكون أفضل عندما يكون المنحنى مرسوماً بالطريقة المذكورة في بند (١٥)

بند (١٩) و (٢٠) و (٢١) بخصوص ذلك بالمقدمة فيه الكفاية ولا حاجة لإعادة الكلام على ذلك

في أقطار المقطع الناقص

بند ٦٥ قد ذكرنا فيما تقدم بند (١١) أنه يمكن اعتبار المقطع الناقص مسقطاً لدائرة على مستو ماثل على مستويها فهذا الاعتبار الذي استنتجنا منه جملة قضايا مهمة يسمح لنا أن نستخرج أيضاً منه بعض قضايا أخرى لها تطبيقات نستعملها فيما بعد

(النظرية العاشرة) كل مستقيم مار بمركز المقطع الناقص يكون قطراً له لأننا إذا اعتبرنا المقطع الناقص أم أم شكل (١٥) والدائرة أم أم التي هو مسقط لها لوجدنا أن كل مستقيم مثل م م مار بمركز المقطع الناقص مسقط لقطر مثل م م من أقطار الدائرة



وحيث أن هذا القطر ينصف جميع الأوتار العمودية عليه أعني الموازية للقطر مر مر فبنا على ذلك يكون المستقيم م م منصفاً لمساقط هذه الأوتار أعني لأوتار المقطع الناقص الموازية إلى المستقيم مر مر الذي هو مسقط قطر مر مر من الدائرة وعلى ذلك يكون كل مستقيم حيثما اتفق مثل م م مار بمركز المقطع الناقص منصفاً لجميع الأوتار الموازية لأتجاه معلوم وبمقتضى بند (٦) يكون قطر من أقطار المنحنى المذكور

لكن يلزم ملاحظة صحيحة عكس هذه النظرية بمعنى أنه حيث كان قطر مر مر من الدائرة منصفاً لجميع الأوتار الموازية إلى قطر م م لمز أن يكون مسقطه وهو مر مر منصفاً بالمثل للأوتار الموازية إلى م م وعلى هذا يعلم أن أقطار المقطع الناقص مرتبطة ببعضها مشني بحيث أن كل قطر منها

منها ينصف جميع الاوتار الموازية الى القطر الثاني وهذا هو ما يعبر عنه بالقول
ان اتجاه احد هذين القطرين مزاج لاتجاه الآخر كما في بند (٦١)
ومن ذلك تنبع النظرية الآتية

(النظرية الحادية عشر) أقطار القطع الناقص مزدوجة مع بعضها مشى
شده من المعلوم ان القطرين المزدوجين في الدائرة اللذين تنسقط الزاوية الواقعة
بينهما على حقيقتها هما القطران $ا ا ر$ و $ب ب ر$ لا غير وحينئذ يعلم من ذلك ان محور
القطع الناقص هما فقط قطراه المزدوجان اللذان تكون الزاوية الواقعة بينهما
قائمة

المسئلة الاولى

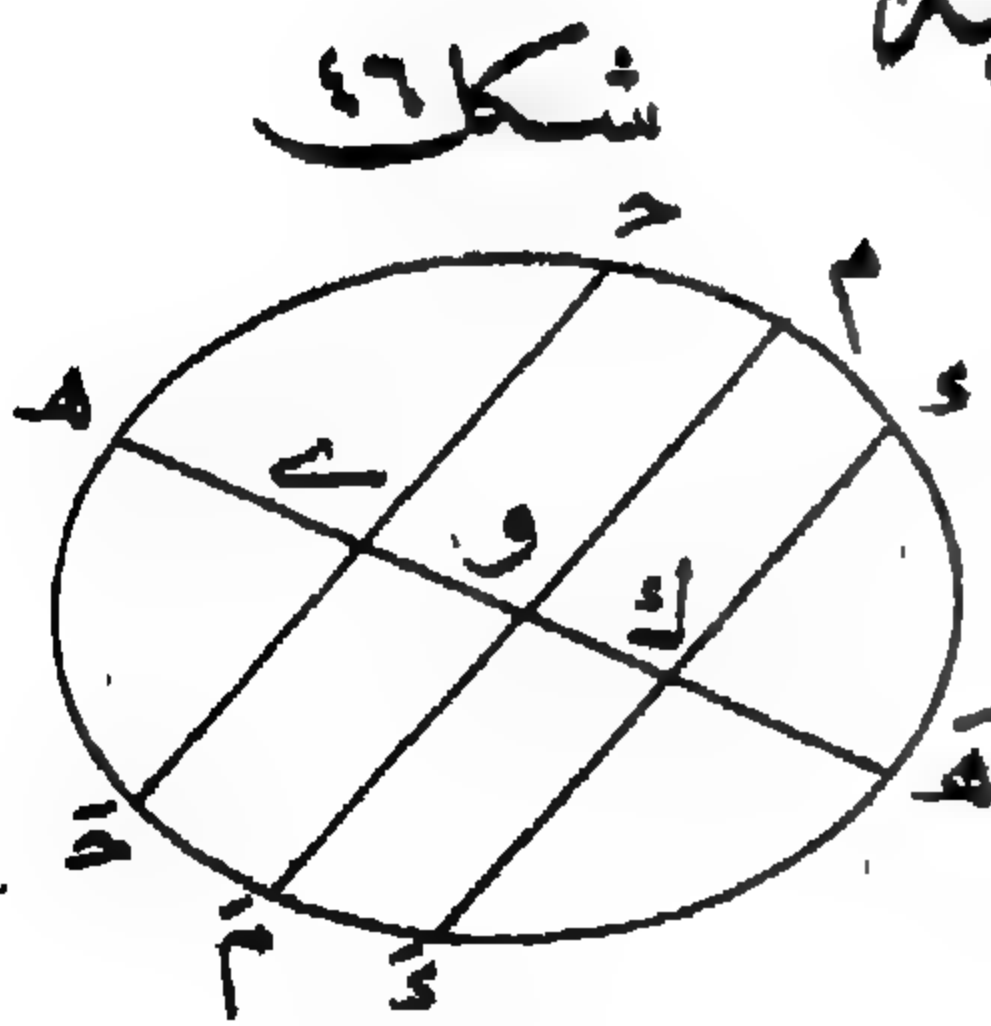
شده المطلوب ايجاد القطر المزاج لقطر معلوم
مثلا لنفرض ان $م م$ شكل (٤٦) هو القطر المعلوم فيكون تعيين القطر المزاج
له ان يرسم الوتر $ح ح$ الموازي الى $م م$ وينصف بنقطة مثل نقطة $و$
ثم نصل من هذه النقطة الى المركز فيكون المستقيم الموصول بهذه الكيفية هو القطر
المطلوب

فاذا ارى القطر الناقص مرسوما يرسم المستقيم $ح ح$ موازيا الى $م م$ ثم
تعين نقطتا $ح ح$ بالطريقة الموضحة في بند (٣١)
شده خاصية الاقطار المزدوجة المتقدمة توصلنا الى حل المسئلة الآتية
ايضا التي تكرر كثيرا في العمل

المسئلة الثانية

المطلوب ايجاد مركز قطع ناقص مرسوم
كله أو جزء منه فقط

لذلك يرسم الوتران $ح ح$ و $د د$ المتوازيان
في اتجاهين متعاكسين ونصل بين منتصفيهما وهما
 $و$ و $ك$ شكل (٤٦) بمستقيم فيكون هو
القطر المزاج لهذه الاوتار ويمر حينئذ بمركز
القطع الناقص



فاذا اجرينا هذه العملية مرة ثانية على وترين متوازيين لكنهما غير موازيين للوترين
الاولين نحصل قطريين يتقاطعان مع القطر الاول في نقطة فتكون هي المركز للقطع
نشد لا يخفى انه تقدم في بند (١١) ان المماس لأي منحن يلزم ان يكون موازيا الى
الوترين المزدوجين الاتجاه مع القطر المار بنقطة التماس فاذا نظرنا الى ذلك
رأينا انه يمكن حل كل من المسئلة الاولى والثالثة من المسائل الثلاثة المتعلقة
برسم مماسات منحن معلوم باستعمال خواص الاقطار المزدوجة لكن فضلا عن
كون الاعمال الرسمية التي تستلزمها هذه الطريقة الجديدة ليست أسهل مما
تستلزمه الطرق التي تقدمت فانه لا يمكن استعمالها مع السهولة الا اذا كان القطع
الناقص مرسومًا من قبل

ومع ذلك فانه يلزم الاعتراف بان هذه الطريقة يكون لها أهمية في حالة ما يراد رسم
مماس لقطع ناقص مرسوم لكن بورتية مجهولتان

نشد (النظرية الثانية عشر) نصف أي قطر من أقطار القطع الناقص وسط
متناسب بين جزئي مماسه الموازي لهذا القطر المحصورين بين نقطة التماس
وبين المحورين

فاذا فرض مثلا ان خطي $رر$ و $مم$ شكل (١٧) قطران متعامدان في الدائرة كان مسقطاهما
وهما $م$ و $ر$ قطرين مزدوجين معا في القطع الناقص كما في بند (١٩) فاذا اخذنا مستقيم مثل

$م$ مماس للدائرة المذكورة وكان قاطعا
لقطري $ا ا$ و $ب ب$ في نقطتي $ط$ و $ح$
فيحدث من مثلث $ح و ط$ القائم الزاوية
ان

$$وم = ح م = م ط \quad (١)$$

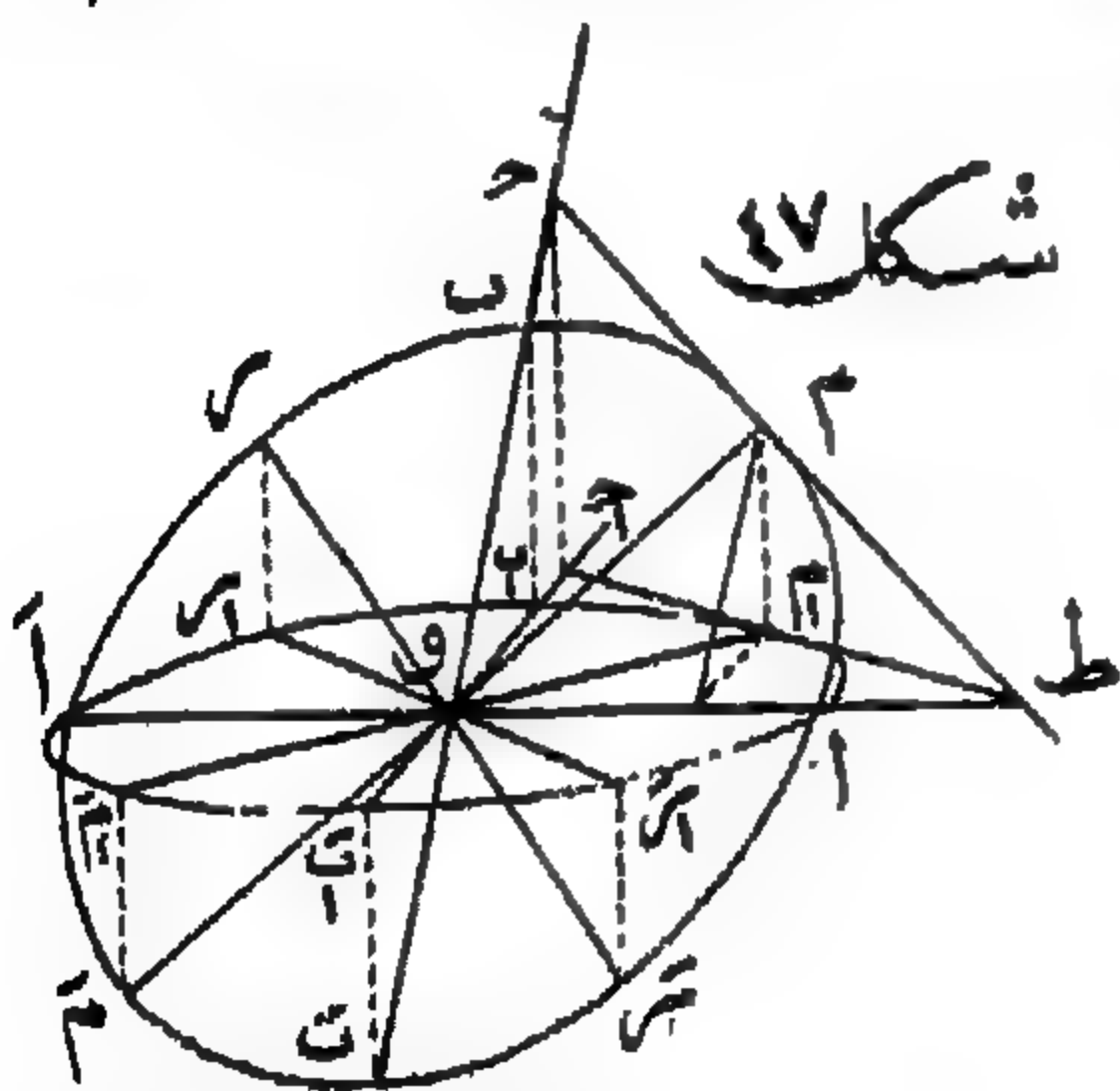
او يكون

$$ور = م = ح م ط$$

لكن حيث ان اضلاع مثلثي $رر و$ و $مم ط$ متوازية فهما متشابهان
وينتج منهما ان

$$\frac{ور}{رر} = \frac{م}{مم} = \frac{م ط}{رر}$$

وحرف $ك$ في هذا القانون رمز للمقدار المشترك لهذه النسب الثلاثة فينتج
من



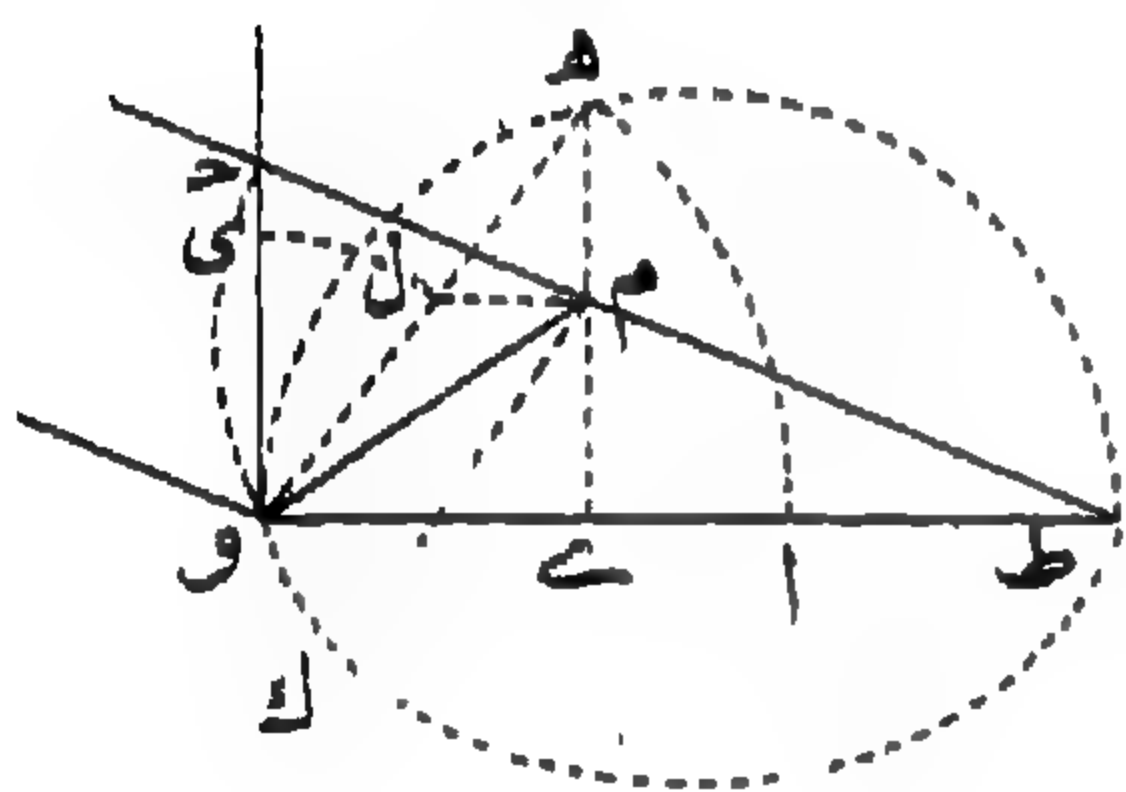
شكل ١٧

من هذا القانون أن

و $م = ك \times و$ و $م ط = ك \times م ط$ و $م ح = ك \times م ح$
 وبوضع هذه المقادير في معادلة (١) وقسمة الطرفين على $ك$ يحدث
 و $١ = م ح ط$ وهذا هو ما اردنا بيانه
 بل يمكن بواسطة هذه النظرية حل المسئلة الآتية

المسئلة الثالثة

المطلوب رسم القطع الناقص إذا كان معلوما منه قطران حيثما اتفق من وجان معا
لذلك يقال من المعلوم ان هذه المسئلة تصير محلولة اذا امكن ايجاد المحورين
فلذا يلزم الابتداء أولاً بالبحث عن اتجاهيهما مع الاستعانة بالنظرية السابقة فنفرض
أن هذه المسئلة الفرعية محلولة وان $و م$ و $ر و$ شكل (٤٨) هما القطران المزدوجان
المعلومان وان $و ط$ و $و ح$ اتجاهاهما المحوران فمن حيث أن مستقيم $ح م ط$ الموازي
الى $و م$ هو مماس للقطع الناقص المجهول في نقطة $م$ فيقتضى ما تقدم في بند (٧٠)
يكون



وَر = م ح م ط
ثم نرسم محيط دائرة على القطر ح ط فيمر هذا
المحيط بنقطة و لان زاوية ح و ط قائمة
و اذا انقnam ك عموديا على ح ط حدث أيضا
م ك = م ح م ط
وبنا على ذلك يكون

مك = و

وحيث يكون المستقيم م ك معلوما وعليه يكون حل المسئلة هو كالات
بان يرسم من نقطة م التي هي نهاية أحد القطرين المعلومين مستقيم مثل ح م ط مواز
للقطر الآخر ثم يقام من النقطة بعينها عمود مثل م ك = و ر ثم ترسم دائرة تمر
بنقطتي و ر ك مركزها على المستقيم ح ط فيقطع محيطها المستقيم ح ط في
نقطتين موجودتين بالضرورة على امتداد المحورين المطلوبين فلم يبق حينئذ لتعيين
اتجاهيهما سوى ان يوصل من هاتين النقطتين للغيثتين الى نقطة و وبعد ذلك يلزم

البحث عن حقيقة طول كل من هذين المحورين وللتوصل الى ذلك نتذكر ان نصف
المحور الأكبر وسط متناسب بين $و$ و $ر$ وط بمقتضى بند (٥٩) فليرسم
حينئذ نصف دائرة على $وط$ ويمد العمود $م$ الى $ح$ نقطة $ح$ التي تقابل فيها مع
نصف الدائرة فيكون $و$ هو الطول المطلوب الذي يلزم وضعه على المستقيم
 $وط$ بجانب نقطة $و$

وقد يمكن عادة العملية بعينها على مستقيم واحد للحصول على طول المحور الأصغر
لكنه يمكن اختصار ذلك بملاحظة انه لا داعي كون المستقيم $و$ مساويا الى نصف
المحور الأكبر تكون نقطة $ح$ نقطة من الدائرة الأصلية بحيث يحدث

$$م : ح :: ر : و$$

وحيث ان $و = ر$ فحينئذ يكون $و = ح$

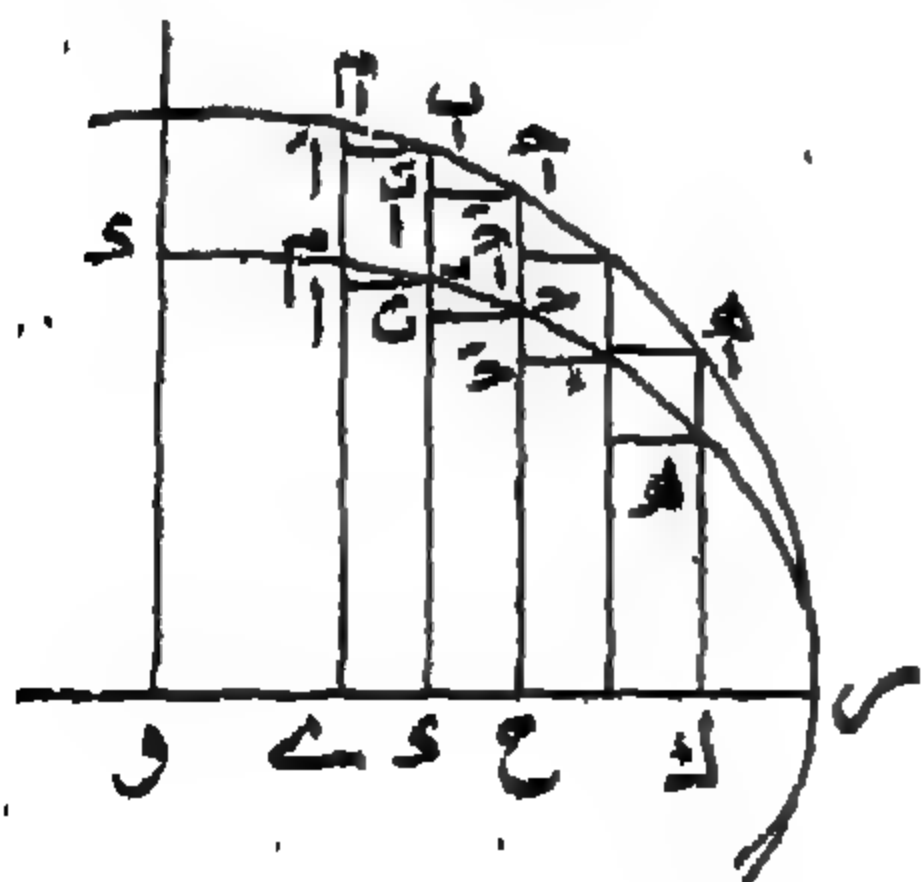
وبناء على ذلك يكفي وضع $و$ على اتجاه المستقيم واحد بجانب نقطة $و$
لتدريشاهما ذكرانه يمكن ايجاد محوري القطع الناقص اذا علم منه قطران
مزدوجان معا وان ليس لتلك المسئلة سوى حل واحد فتنتج النظرية الآتية
(النظرية الثالثة عشر) القطع الناقص بصير معلوما متى علم منه قطران مزدوجان
معا

الفصل الثالث

في مساحة القطع الناقص وفي الجسم الناقص وجسم

٧٣ القطع الناقص هو أحد المنحنيات التي يمكن لحساب مساحتها
بالضبط وهذه هي المسئلة التي نريد ان نتصدى الآن لذكرها ولذلك نبعث
أولا عن مساحة الجزء المحصور بين قوس من المنحنى وأحد محوريه وبين احدائين
عموديين على هذا المحور فنقول

شكل ٤٩



الأكبر

اذا كان القصد مثلا لحساب المساحة
م $ح$ في شكل (٤٩) المحصورة بين
احدائين عموديين على المحور الأكبر فتقسم
المسافة $م$ الى اجزاء متساوية عددها
اختياري وتقام من نقاط التقاسيم اعمدة
وتمد الى ان تقابل الدائرة المرسومة على المحور

الأكبر ثم من النقطة ب ح الخ وكذا من النقطة ب ح الخ
 ترسم مستقيمتين موازيين إلى المحور المذكور فتكون جملتان من المستطيلات
 قواعدها متساوية وارتفاعات مستطيلات أحدهما هي رأسيات القطع الناقص
 وأما ارتفاعات مستطيلات الجملة الثانية فهي رأسيات الدائرة وبتقضى بند (١٥)
 يكون حينئذ $\frac{س}{س} = \frac{س}{س} = \frac{س}{س} = \frac{س}{س} = \frac{س}{س} = \frac{س}{س}$

فاذا رمز بحرف س لمجموع مساحات المستطيلات المرسومة داخل القطع الناقص
 وبحرف س لمجموع المستطيلات المرسومة داخل الدائرة حدث
 $س : س :: س : س$

وحيث ان هذا التناسب يبقى صحيحا مهما كان عدد تقاسيم س ك فاذا فرض
 حينئذ أن عدد التقاسيم يزداد إلى ما لا نهاية قرب بالضرورة مجموع س شيئا
 فشيئا من مساحة القطعة الناقصية التي يرمز لها بحرف س لباري البحث
 عنها وأما المجموع س فانه يميل إلى أن يؤل إلى مساحة القطعة الدائرية المناظرة لها
 التي يرمز لها بحرف ص وحينئذ اذا اخذت النهايات أعني حينما نصير نقط التقاسيم
 متقاربة جدا من بعضها يحدث

$$ص : ص :: س : س$$

ومن البديهي أنه اذا اخذت الاحداثيات عمودية على المحور الاصغر ورمز بحرف ص
 لمساحة القطعة الناقصية وبحرف ص للقطعة الدائرية المناظرة لها التي هي جزء
 من الدائرة المرسومة على المحور الاصغر حدث تناسب متشابه إلى التناسب الاول
 أعني يكون

$$ص : ص :: س : س$$

وهذا دليل على صحة النظرية الآتية فهو اثبات لها
 (النظرية الرابعة عشر) نسبة مساحة القطعة المحصورة بين قوس من القطع
 الناقص واحد ومحوريه وبين احداثيتين عموديتين على المحور المذكور إلى مساحة القطعة
 الدائرية المناظرة لها المرسومة على المحور بعينه كنسبة قطر القطع الناقص العمودي
 على المحور المشترك إلى قطر الدائرة المناظرة له أي العمودي ايضا على المحور المشترك
 المذكور

٧٤ مثلاً لنفرض الآن ان نقطتي ϵ و δ بعداً عن بعضهما الى ان انطبقت احدهما على نقطة γ والاخرى على نقطة β فتؤول حينئذ القطعة الناقصية الى نصف القطع الناقص ويصير جزء الدائرة نصف دائرة فعلى هذا اذا مر بحرف δ مساحاة القطع الناقص كله كانت نسبة

$$\frac{1}{4} \text{ س} : \frac{1}{4} \text{ ط} :: \delta : \epsilon$$

ومن هذا التناسب يكون

$$\text{س} = \text{ط} \cdot \delta$$

وحينئذ فتتبع النتيجة الآتية

(نتيجة) مساحاة القطع الناقص تساوي حاصل ضرب نصفى محوريه في النسبة التقريبية

في تكوين المجسم الناقصى وتعيين حجمه

٧٥ مثلاً اذا تصورنا أن نصف قطع ناقص قد دار حول أحد محوريه دورة كاملة تولد بالضرورة عن هذا الدوران جسم تحركي يسمى بالمجسم الناقصى التحركي ويكون المقطع الجانبي لهذا الجسم أعنى المقطع الحادث فيه بمستويان محور الدوران هو بالضرورة نفس القطع الناقص الذي ولدته

فاذا حصل الدوران حول محور الأكبر سمي الجسم الحادث بالمجسم الناقصى المستطيل اما اذا كان محور الدوران هو المحور الأصغر سمي الجسم الحادث بالمجسم الناقصى المبطط ولنتصدي بالبحث عن حجم كلا هذين النوعين فنقول

٧٦ مثلاً (في المجسم الناقصى المستطيل) ليكن م هـ ك في شكل (١٩) هو جزء من القطع الناقص فيدورانه حول المحور الأكبر يحدث قطعة من المجسم الناقصى محصورة بين مستويين عموديين على هذا المحور

فاذا اجرينا العمليات المشروحة ببند (٧٣) نشأ عن ذلك جملتان من المستطيلات التي يحدث من دورانها جملتان من الاسطوانات ولكون ان ارتفاع هذه الاسطوانا واحد فتكون النسبة بينها كالنسبة بين قواعدها او كالنسبة بين مربعات الرأسيت المناظرة لهما ويحدث حينئذ أن

$$\frac{\text{حجم م ا ب د}}{\text{حجم م ا ب د}} = \frac{\text{حجم و ف ح ج}}{\text{حجم و ف ح ج}} = \dots = \frac{\text{حجم هـ ز ح ج}}{\text{حجم هـ ز ح ج}}$$

فاذا رُمِ بِجُزْءٍ عَ لِمَجْمُوعِ الاسطوانات المرسومة داخل قطعة الجسم الناقصة
وَجُزْءٍ عَ لِمَجْمُوعِ الاسطوانات المرسومة داخل قطعة الكرة الحادثة من دوران
قوس الدائرة حدث

$$ع : ع :: \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$$

ولاشك ان هذا التناسب يكون موجودا مهما أخذ الارتفاع المشترك للاسطوانات
صغيرا جدا بل وفي حالة اخذ النهايات ايضا ولا يخفى انه اذا صغر هذا الارتفاع
الى ما لا نهاية آل المجموع ع الى ع الذي هو حجم القطعة الناقصة والمجموع ع الى ع
الذي هو حجم القطعة الكروية المناظرة لها ويكون حينئذ

$$ع : ع :: \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$$

٧٧ (في الجسم الناقص المبطط) اذا تصورنا نفس هذه التصورات والابعاد
بعينها مع استبدال المحور الأكبر بالمحور الأصغر والدائرة المرسومة في شكل (١٩)
بالدائرة المرسومة على المحور الأصغر وكذلك مع تغيير الاحداثيين م م ر هـ
بالاحداثيين العموديين على المحور الأصغر توصلنا بمثل ما تقدم الى التناسب الآتي

$$ع : ع :: \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$$

٧٨ فاذا جمعت هذه النتائج في منطوق واحد امكن تشكيل النظرية الآتية
(النظرية الخامسة عشر) اذا دوّر قطع ناقص مع الدائرة المرسومة على أحد
محوريه دورة كاملة حول المحور المشترك بينهما كانت نسبة حجم القطعة الناقصة
المحصورة بين مستويين عموديين على محور الدوران الى حجم القطعة الكروية المحصورة
بين نفس المستويين المذكورين كالنسبة بين مربعي القطرين العموديين على محور
الدوران المذكور

٧٩ فاذا فرض ان المستويين المحددين لها تين القطعتين قد بعدا عن بعضهما
حتى تراى نهايتي محور الدوران آل الحيطان الحادّتان الى حجمي مجسم القطع الناقص الكلي
والكرة بتمامها وحينئذ اذا كان الجسم المعلوم هو مجسم القطع الناقص المستطيل
حدث

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{ع}{\frac{1}{2}}$$

ومنه يكون

$$ع = \frac{1}{2} ط \frac{1}{2} = \frac{1}{4} ط$$

اما اذا كان الجسم المعلوم هو الجسم الناقص المبسط حدث

$$\frac{e}{\frac{1}{4} \pi r^2} = \frac{e}{\frac{1}{4} \pi r^2}$$

ومنه يكون

$$e = \frac{1}{4} \pi r^2 \dots \dots \dots (١)$$

ويمكن كتابة كل من مقدارى (١) ، (٢) بالصورة الآتية

$$e = \pi r^2 \times \frac{1}{4} \quad \text{و}$$

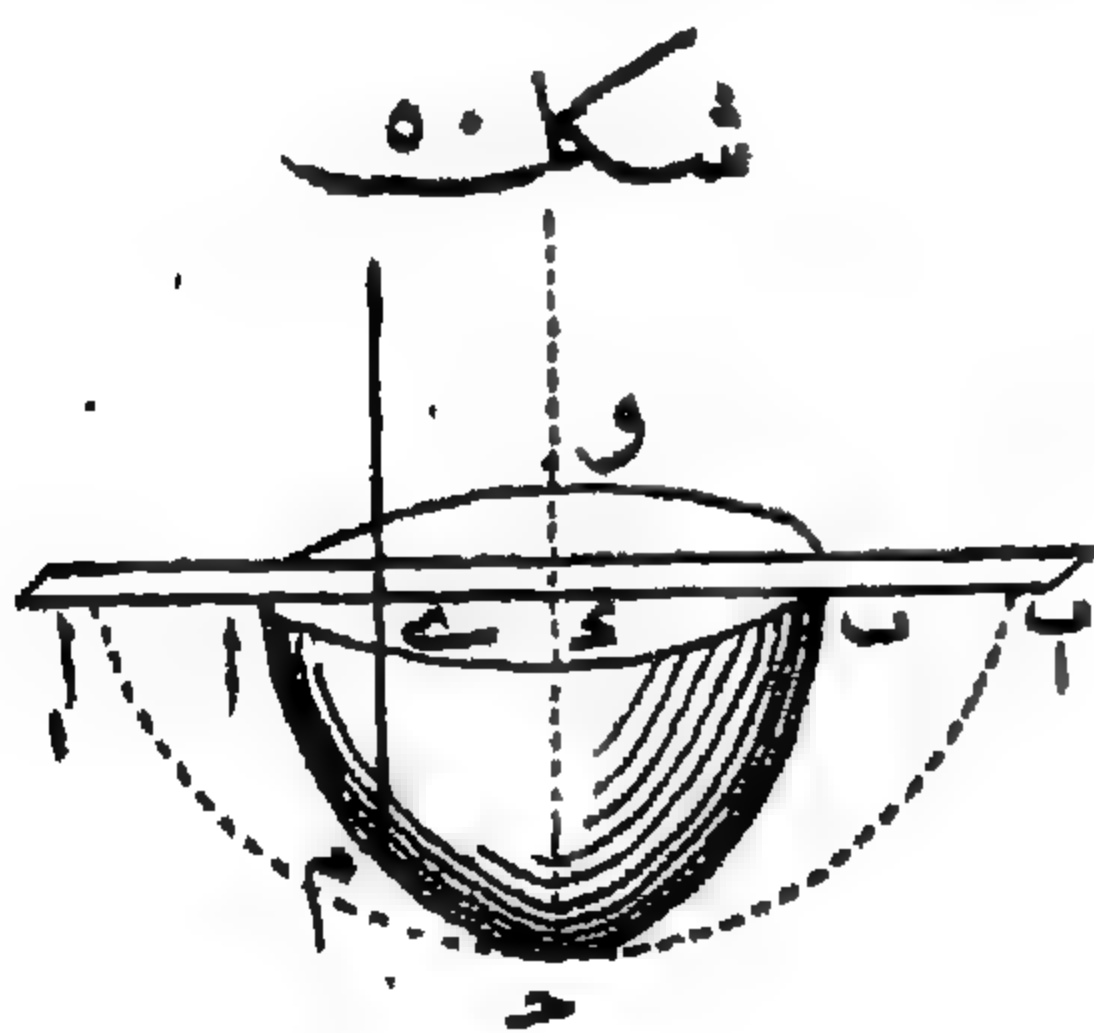
$$e = \pi r^2 \times \frac{1}{4}$$

وهذا يوصلنا الى منطوق سهل التذكار وهو الآتى

حجم مجسم القطع الناقص يحصل بضرب مساحة القطع الناقص الراسم له فى $\frac{1}{4}$ نصف المحور العمودى على محور الدوران

(نشهد فى تقدير حجم الجسم القرعى) الجزء الاسفل من قران الانبيق يعمل غالبا على شكل قطعة من مجسم ناقص مستطيل ويعرف بقرعة الانبيق فلاحل تقدير حجم هذا الجزء القرعى نوضع القرعة بحيث تكون حافتها المستديرة افقية وبعد ذلك يوضع على تلك الحافة مسطرة مدرجة بحيث يكون حرفها اما زا من مركز فتحة القرعة ويحرك على حرف هذه المسطرة خط شاقول بحيث يكون طرف الثقل المعلق به مماسا على الدوام للسطح الداخلى من القرعة

فلنفرض مثلاً ان المحيط موضوع فى الوضع م م شكل (٥) ويقاس البعد م م بواسطة المسطرة ثم البعد م م بحيط الشاقول المدرج وباعادة هذه العملية جملة مرات فى اوضاع مختلفة يمكن الحصول على جملة نقط من القطع الجانبى ا ح ب



للقرعة فتوضع على الورق ويرى بها منحن فيكون هو جزء من القطع الناقص الراسم للقرعة وتعلم ايضا راسه وهى ح واتجاه محوره الاكبر وحيث ان جنبا من القطع الناقص معلوم فيسهل إيجاد مركزه وهو نقطة و بمقتضى ما تقدم فينته

في شد وبذا يمكن رسم الدائرة الاصلية وحساب حجم الجسم الحادث من دوران
قطعة الدائري ا ح ب ثم نقول اذ ارزنا بحرف ح لحجم القرعة وبحرف ح
لحجم قطعة الكرة فيكون بمقتضى (شد)

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{H}{h}$$

ثم نحسب النسبة $\frac{R}{r}$ من الارتباط الآتي

$$\frac{1}{r} = \frac{R}{h}$$

وحيث اذا لاحظنا ان حجم القطعة الكروية مساوي الى

$$H = \frac{1}{3}\pi R^2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi r^2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi r^2 \times \frac{1}{3}$$

فيكون الحجم المطلوب مساويا الى

$$H = \frac{1}{3}\pi R^2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi r^2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi r^2 \times \frac{1}{3}$$

وبالاختصار يحدث

$$H = \frac{1}{3}\pi R^2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi r^2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi r^2 \times \frac{1}{3}$$

وهو المطلوب

الباب الثالث

في القطع الزائد وفيه فصوص

الفصل الاول

في تعريف القطع الزائد وطرق رسمه وخواصه الهندسية

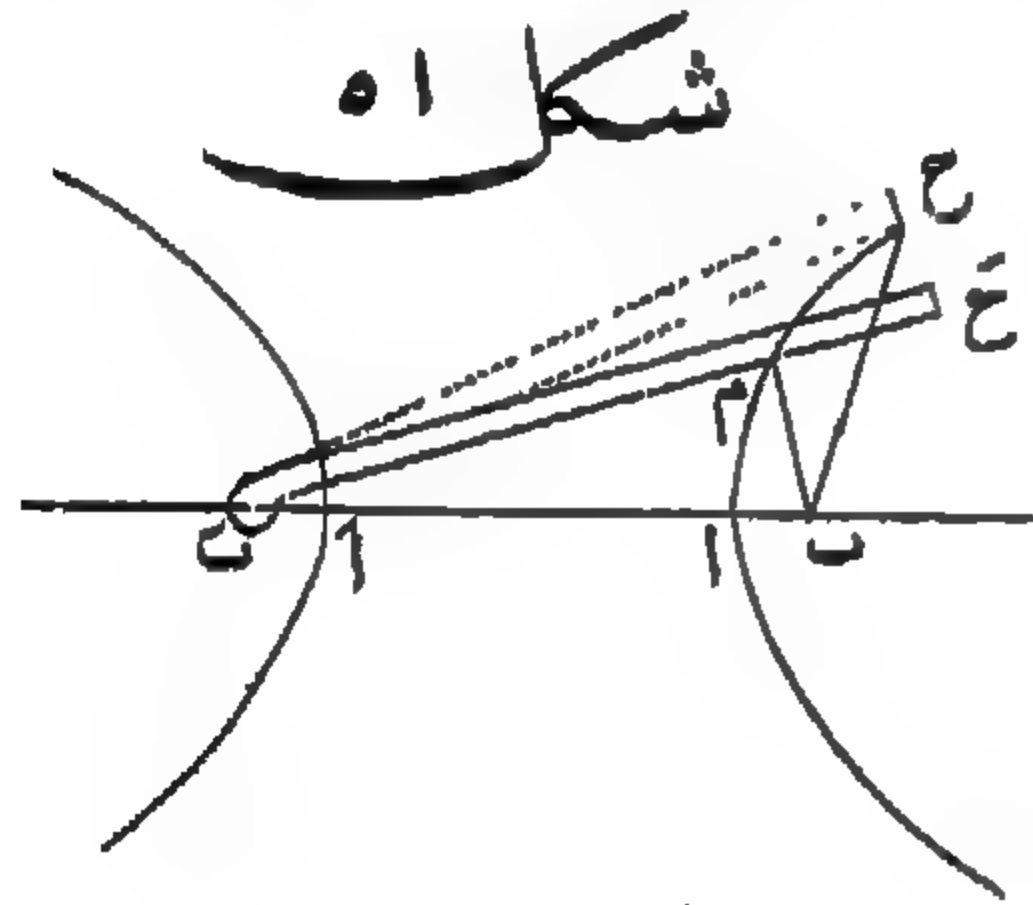
شد القطع الزائد هو منحني مستوي الفرق بين البعدن الواصلين من أي نقطة

منه الى نقطتين ثابتتين في مستويه يكون ثابتا على الدوام

وهاتان النقطتان الثابتتان تسميان بؤرتي القطع الزائد والمستقيمت الواصلة

من هاتين البورتين الى اى نقطة من المنحنى تسمى انصاف اقطار بوريه
ومن المعلوم ان هذا المنحنى يمتد الى ما لا نهاية لانه اذا اضعيف على نصف قطر البورتين
كمية واحدة وفرض ان هذه الكمية تزداد شيئاً فشيئاً فان نصف القطرين المذكورين
يزدادان بقدر ما يزداد لكن بدون ان يتغير الفرق بينهما

سشد في طرق رسم القطع الزائد — اولا طريقة رسمه بالاستمرار
ينبع من التعريف المتقدم للقطع الزائد طريقة لرسمه بالاستمرار على رسم جزء
منه محدود وهى ان تؤخذ مسطرة طولها حيثما اتفق وثبتت من احد طرفيها
في احدى البورتين وهى ب شكل ١٥ ، تثبيتا بحيث لا يمنع دوران
المسطرة حول هذه النقطة بالسهولة ثم يؤخذ خط ويثبت احد طرفيه
في الطرف الثانى من المسطرة وطرفه الثانى في البورت الاخرى ب انما يلزم ان
يكون طول هذا الخط اقل من طول المسطرة بمقدار مساو للفرق الثابت بين نصفى
القطرين البورتين الذى يرمز له بالرمز ρ فهذه الحكيمة اذا حركت



المسطرة الى ان تشد الخيط المثبت فيها
بأحد طرفيه شدا قويا صارت نقطة ح
بالضرورة نقطة من القطع الزائد
ثم يحرك سن القلم الرصاص بحيث
يكون دائما متكئا على حافة المسطرة
وشاد الخيط فيكون المنحنى المرسوم
بسن القلم قوسا من القطع الزائد

وفي الواقع لانه اذا فرض ان نقطة م وضع من اوضاع سن القلم الرصاص
شوهذا ان بعدى ب ح ، ب ح قد نقصا في آن واحد بقدر م ح وان
المسطرة انتقلت من الوضع ب ح الى الوضع ب ح فحينئذ يكون باقى الطرح
ب ح مساويا ايضا الى ρ

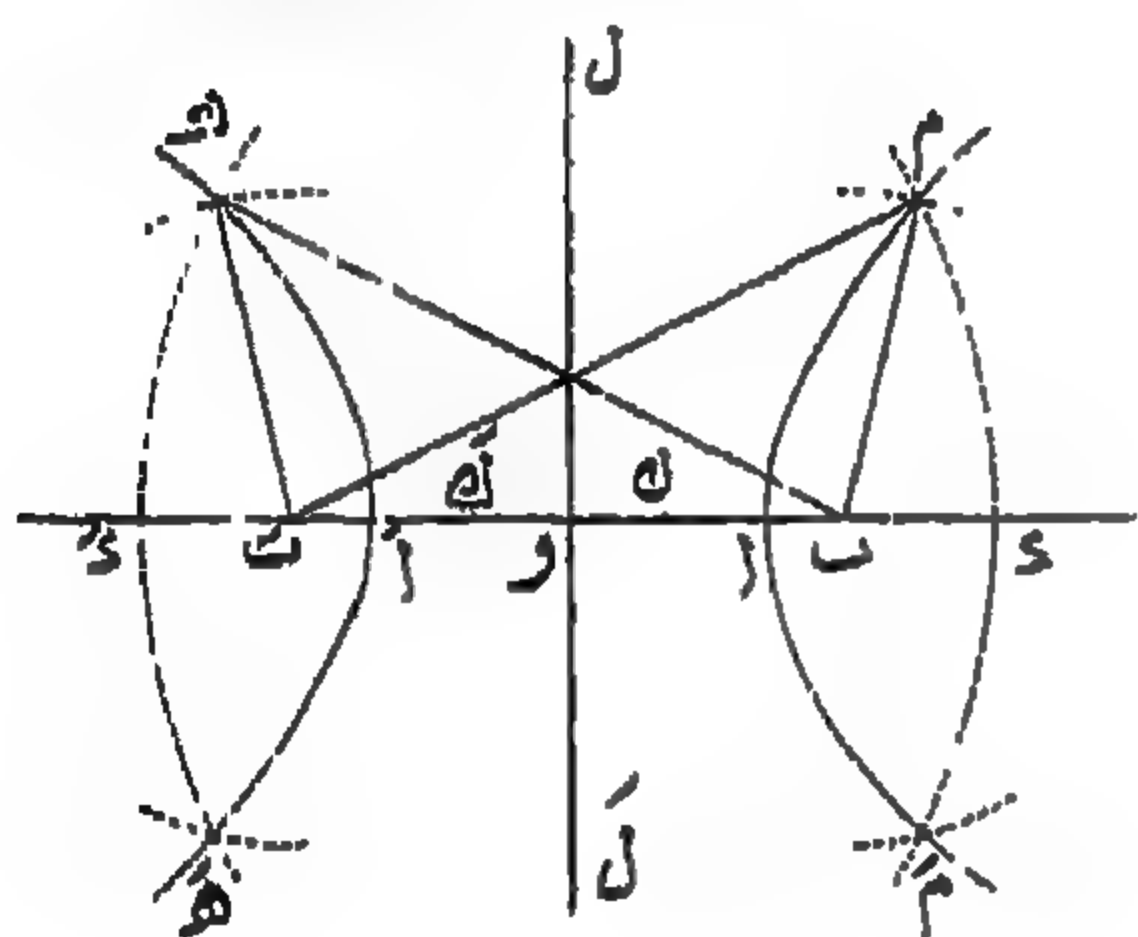
ومن البديهي انه اذا نقلت المسطرة وثبت طرفها في نقطة ب بدلا عن ب
وثبت ايضا الخيط في نقطة ب تحصل فرع آخر من القطع الزائد
وهذه الطريقة هى اقل ضبطا من طريقة رسم القطع الناقص بالاستمرار فضلا عن

كونها

كونها تحتاج لمسطرة مخصوصة لا يمكن عملها بالضبط إلا بمسطرة زائدة
 ١٨٣ ثانياً طريقته رسم نقطة فنقطة - أحسن طريقة مضبوطة لرسم القطع الزائد
 هي أن تعين عدة نقط منه وتجمع بمنحن متصل

مثلاً ليكن B, T شكل ١٥٢ بورتى القطع الزائد فناخذ بعد
 $T = K$ ثم نجعل نقطة T مركزاً ونصف قطر حيثما اتفق يسر ثم محيط
 دائرة يقطع المستقيم BT في نقطة مثل E ثم نجعل نقطة B مركزاً ونصف
 قطر مساوياً إلى BE يرسم محيط آخر فيقطع المحيط الأول في نقطتين مثل M, N
 تكونان نقطتين من القطع الزائد

شكل ٥٢



فإذا غيرنا وضع نقطة E عدة مرات
 نحصل على جملة نقط من القطع الزائد
 بقدر ما نريد

١٨٤ في كل وضع من أوضاع
 نقطة E يمكن الحصول على أربع نقط
 من القطع الزائد ويكون في ذلك
 أن يبدل العمل على كل من البورتين
 B, T

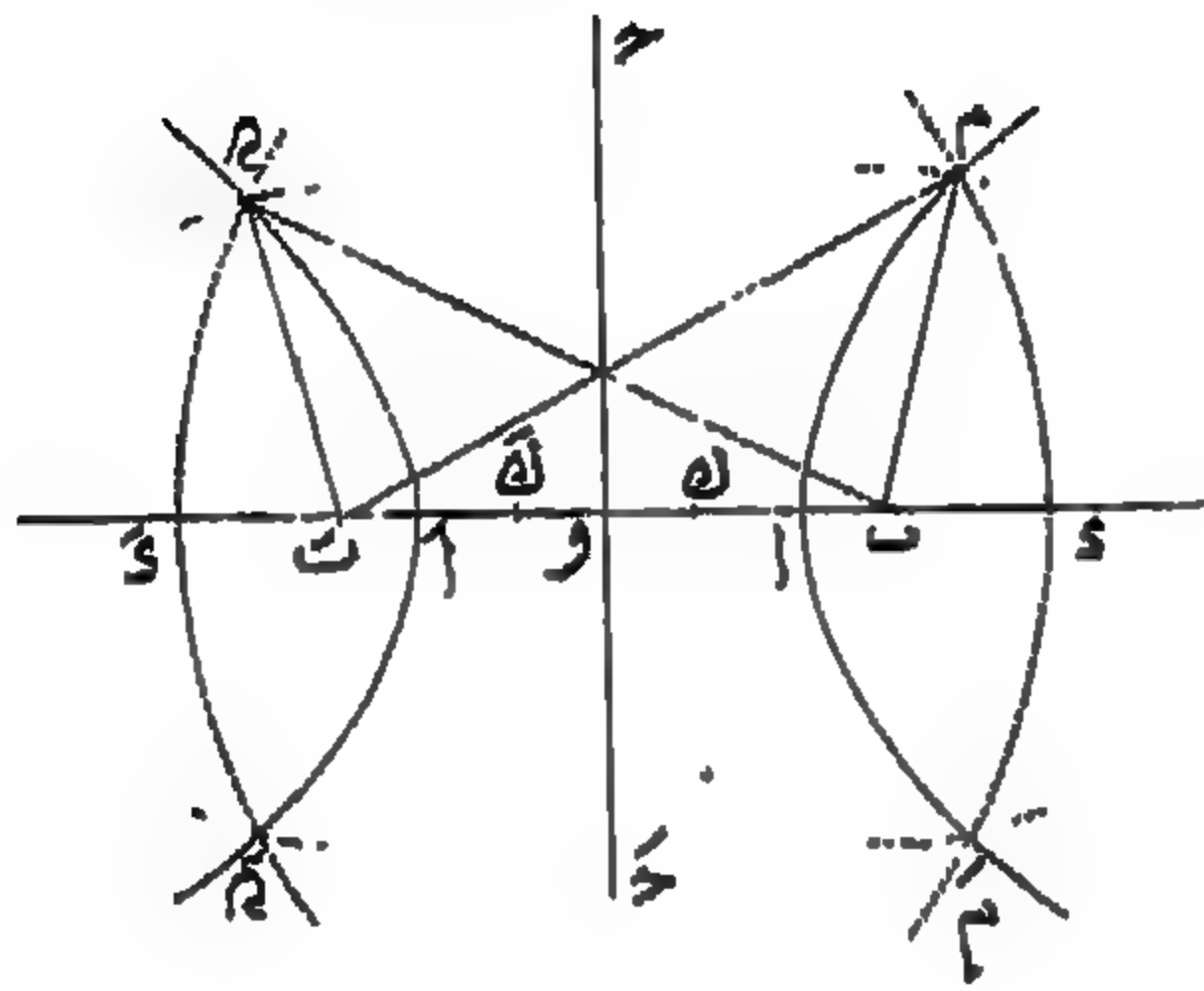
ومن الواضح أنه يلزم لا مكان تقاطع الدائرتين أن يكون بعد نقطة E عن نقطة
 B أكبر من بعد نقطة A التي هي وسط بعد K عن نقطة B بعينها
 ومما يشاهد بالسهولة هو أن القطع الزائد يترك من فرعين لأنها شين ليس
 بينهما نقط مشتركة أبداً لأن كل نقطة من نقط الكائنة في جهة البورت B كنقطة
 M مثلاً يوجد فيها أن $T = M < B$ أمّا النقط الكائنة في جهة البورت T
 يوجد في كل منها بالعكس أن $T > B$

الخاص الهندسي للقطع الزائد

١٨٥ النظرية الأولى - القطع الزائد هو منحن محدد
 وبرهان هذه النظرية مشابه لبرهان النظرية المماثلة لها في القطع الناقص
 فلاشباتها يكفي حينئذ أن تصدى شرح المسألة الآتية

والمستقيم العمودي عليه من وسطهما المحوران لهذا المنحنى وبرهان ذلك هو عين
البرهان المقرر في القطع الناقص بند (٥٢)
وانما يستعمل هنا شكل (٥٤) لاجل تطبيق البراهين المذكورة عليه

شكل ٥٤



وما يشاهد بالسهولة هو ان
المحور حـ لا يقابل القطع
الزائد ابدا لانه لما كانت
نقطه هذا المستقيم متساوية
البعد عن البورتين فلا يتأتى
ان تكون من نقطه المنحنى
وننتج من ذلك ان منحنى القطع
الزائد ليس له سوى رأسين
اثنين يمكن تعيينهما بالسهولة

وفي الواقع لان نقطة ا التي هي وسط بعد ب ك شكل (٥٤) هي نقطة من
المنحنى اذ ان

$$ب - ا = ا - ك = ك - ب = ٢$$

فتكون حينئذ نقطة ا المذكورة احدى رأسى المنحنى
ولاجل ايجاد الرأس الثانية يؤخذ بعد ب ك مساويا الى بعد ب ك ثم
ينصف بعد ب ك بنقطة مثل آ فتكون هي الرأس الثانية المطلوبة او يؤخذ
بعد ب آ مساويا لبعد ب ا

ولاجل تمييز هذين المحورين عن بعضهما سمي احدهما بالمحور القاطع والثاني بالمحور
الغير قاطع

ومن البديهي ان اولهما يكون مساويا للفرق الثابت بين نصفى القطرين البورتين
لنقطة حيثما اتفق من المنحنى وذلك لان

$$ا - آ = ب ك + ك - آ$$

$$ا - آ = ب ك$$

$$ا - آ = ب ك = ٢$$

لكن كان

فيستدركون

بند (٥٧) في مركز القطع الزائد النظرية الثالثة - نقطة تقابل محورها

القطع الزائد بعضها هي مركز هذا المنحنى
وبرهان ذلك هو عين البرهان المتقدم في القطع الناقص بند (٤٧) مطبقاً
على شكل (٥١) المتقدم

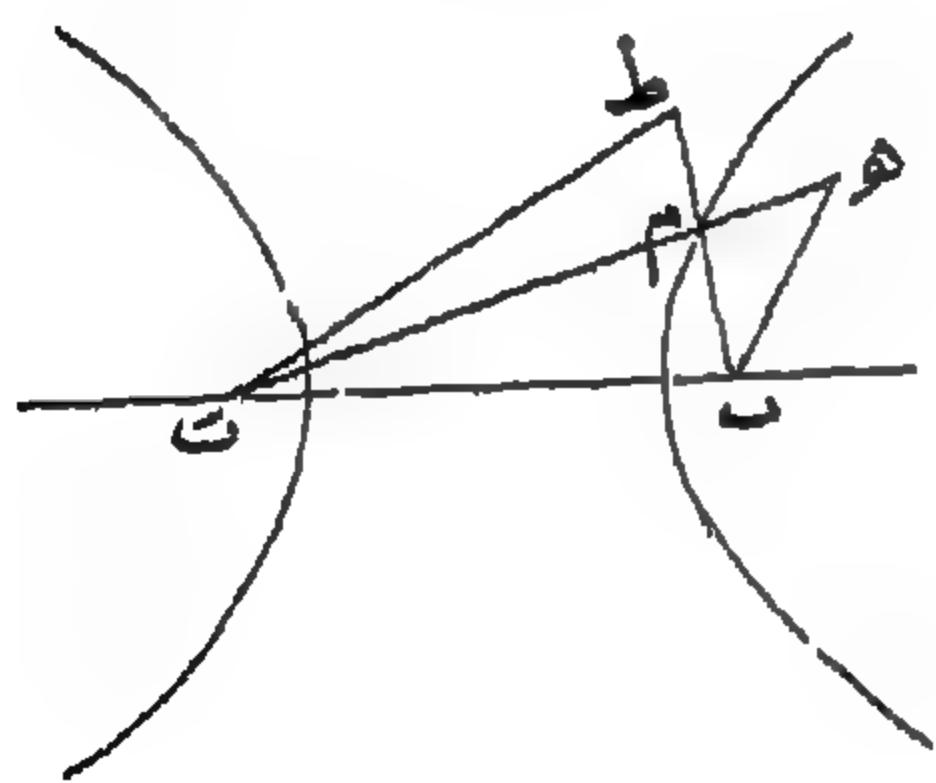
س١٨ الاختلاف المركزي - من المعلوم أن هيئة القطع الزائد تتعلق
بالنسبة الكائنة بين بعد البورتين عن بعضها وبين طول المحور القاطع وتسمى هذه
النسبة بالاختلاف المركزي فاذا رجع حرف e للبعد بين البورتين
وحرف a لطول المحور القاطع كان الاختلاف المركزي

$$f = \frac{a^2}{c}$$

ومن هنا يشاهد أن الاختلاف المركزي يكون دائماً أكبر من الواحد الصحيح
وأنه من البديهي أن القطع الزائد يكون معيناً متى علم كل من اختلافه المركزي وطول
محوره القاطع أعني المسافة الكائنة بين رأسيه

س١٩ النظرية الرابعة - منحنى القطع الزائد يقسم مستوييه إلى قسمين
بحيث يكون الفرق بين نصفي القطرين البوريين لأي نقطة من القسم الأول أصغر
من طول المحور القاطع أما في القسم الثاني يكون هذا الفرق أكبر من طول المحور المذكور
فالاولى تكون نقطة ط مثلاً نقطة

شكل ٥٥



من القسم الأول وهو الخارجى بالنسبة
للقطع الزائد كما في شكل (٥٥)
بمعنى أنها موضوعة في المسافة المنخفضة
بين الفرعين فاذا وصل منها إلى
البورتين بنصفي قطرين بوريين كان
من الواضح الجلي أن نصفي القطرين
المذكورين قاطعان لمنحنى القطع الزائد

ولتكن نقطة م مثلاً إحدى نقطتي التقاطع فنصل مستقيم ت م ويجد
حينئذ من مثلث ط م ت أن

$$ط ت - ط م > د م ت$$

وبطرح م ت من هذه المتباينة يحدث

$$ط ت - ط م - م ت > د م ت - م ت$$

ايضا المستقيم ب ح ونقول من حيث ان خطى م ب م ح هما متساويا
البعد عن موقع العمود م فيكونان متساويين
وبالمثل يكون خطا م ب م ح متساويين وخطا ح ب ح ه متساويين
ايضا ويحدث حينئذ ان

$$\text{ب م} - \text{ه م} = \text{ت م} - \text{ب م} = \text{ر م} = \text{ر ه}$$

$$\text{ت م} - \text{ه م} = \text{ب م} - \text{ت م} = \text{ر م} = \text{ر ه}$$

$$\text{ه ت} = \text{ت ح} - \text{ح ه} = \text{ت ح} - \text{ح ب}$$

وايضا يشاهد من مثلث ه م ت ان

$$\text{ه ت} < \text{ت م} - \text{ه م}$$

ومن بعد الاستعاض بمتحدث ت ح - ح ب < ر م

ومن هنا يعلم ان نقطة ح موجودة داخل القطع الزائد وموضوعة بين نقطتي
م م ح فيثبت عند ما تقرب هانا ان النقطتان من بعضهما الى ان يتحدتا نقطة ح
معها ايضا وفي هذا الوقت يصير المستقيم القاطع مماسا وتصبح نقطة ح نقطة
تماس بالمخني

وحيث ان مثلث ب ح ه لا يزال متساويا السابقين مما تغير وضع القاطع فلا
يزال العمود ح م منصف بالضرورة لزاوية ب ح ت وتبقى هذه الخاصية
موجودة ايضا عند النهاية اعني عند ما يصير هذا القاطع مماسا ويصير ضلعنا
هذه الزاوية نصف القطرين البورين لنقطة التماس وهذا هو ما اردنا بيانه

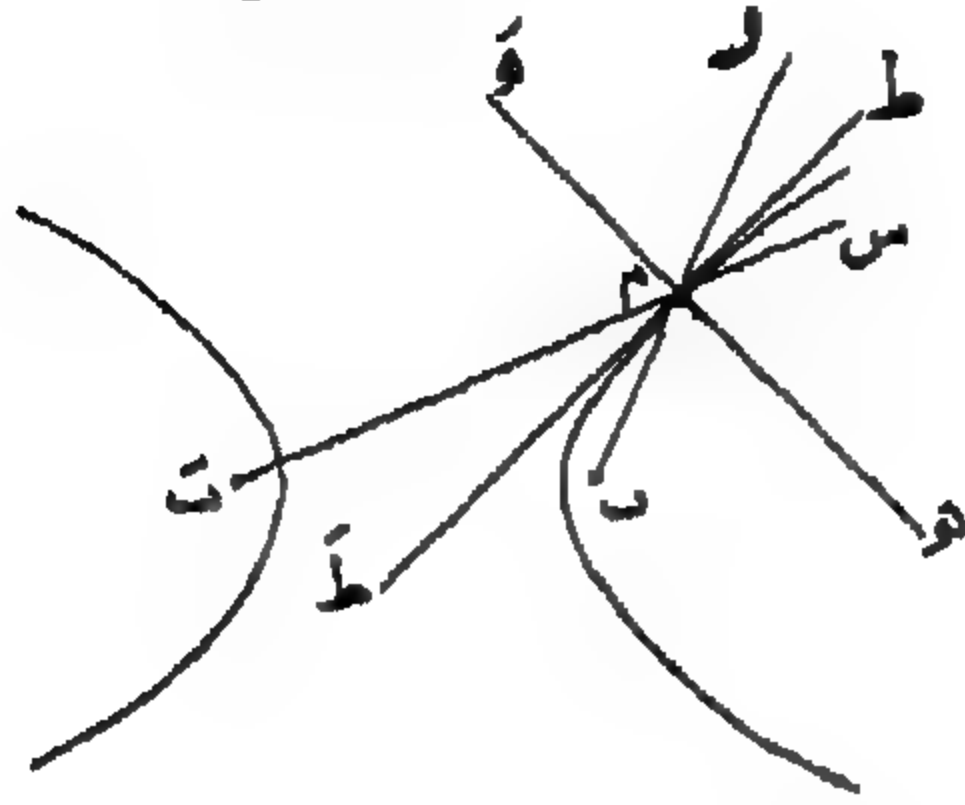
وسلزم هنا ان ننسب على ان المستقيم المماس للقطع الزائد ليس كمماس للقطع الناقص
منصف للزاوية الواقعة بين احد نصفي القطرين البورين لنقطة التماس وبين
امتداد الآخر بل يكون منصف للزاوية الواقعة بين نفس نصفي القطرين البورين
لنقطة التماس

سأقدم نتيجتي الأولى - المستقيم العمودي على مخني القطع الزائد في أي نقطة
من محيطه يكون متساويا الميل على كل من نصفي القطرين البورين المماسين
بهذه النقطة

مثلا اذا كان مستقيم ط ط شكل (٥٧) مماسا للقطع الزائد فتكون
زاويتا ت م ط ر ط م ب بناء على ما تقدم في النظرية السابقة متساويتين

وحيث ان المستقيم العمودي على هذا المنحنى في نقطة التماس م الذي هو م ه يلزم ان يكون بمقتضى تعريفه عموديا على ط ط

شكل ٥٧

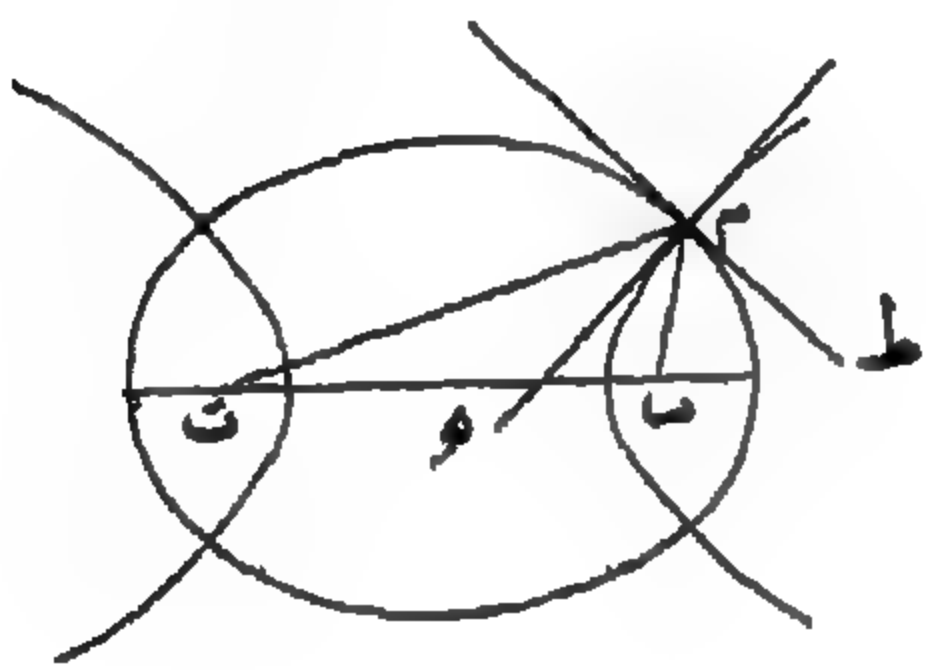


فيكون منصفاً لزاوية س م ب الواقعة بين نصف القطر البوري م و بين امتداد نصف القطر الآخر وهو م م وعلى ذلك تكون زاويتا ب م ه م م ه متساويتين وهو المطلوب

سند نتيجة ثالثة - منحني القطع الناقص والزائد المشتركان في البورتين يتقاطعان على زاوية قائمة

لانه لا يخفى اولا ان الزاوية التي يتقاطع عليها منحنيان حيثما اتفق ليست هي الا الزاوية الواقعة بين المستقيمين المماسين لهذه المنحنيين في نقطة تقاطعها

شكل ٥٨



فاذا قرر هذا لنفرض ان نقطة م مثلا من شكل (٥٨) هي نقطة مشتركة بين قطع ناقص وقطع زائد متحد البورتين فاذا وصل المستقيمان م م م كان المستقيمان المماسان للمنحني القطع الزائد والقطع الناقص في نقطة تقاطعها هما المستقيمان المنصفان لزاوية م م م وللزاوية المحيطة لها وحينئذ يكون

هذان المماسان متعامدين على بعضهما وهو المطلوب

سند في المراتب الزائدين - القطع الزائد له خاصية مشابهة لخاصية القطع الناقص المتقدمة في بند (٥٢) بمعنى انه اذا فرض ان الفرع الايمن من القطع الزائد المبين في شكل (٥٧) مكون من صفيحة مضغوطة من الداخل ومن الخارج ووضع في نقطة ب ينبوع ضوئي فجميع الاشعة الضوئية البازغة من هذه النقطة تأتى الى العين بعد انعكاسها على سطح المنحنى من الداخل لكن بحيث يظنها الراى بازغة من البورة الاخرى ت التي يتجلى فيها ينبوعاً ضوئياً وبالعكس فان الاشعة الخارجة

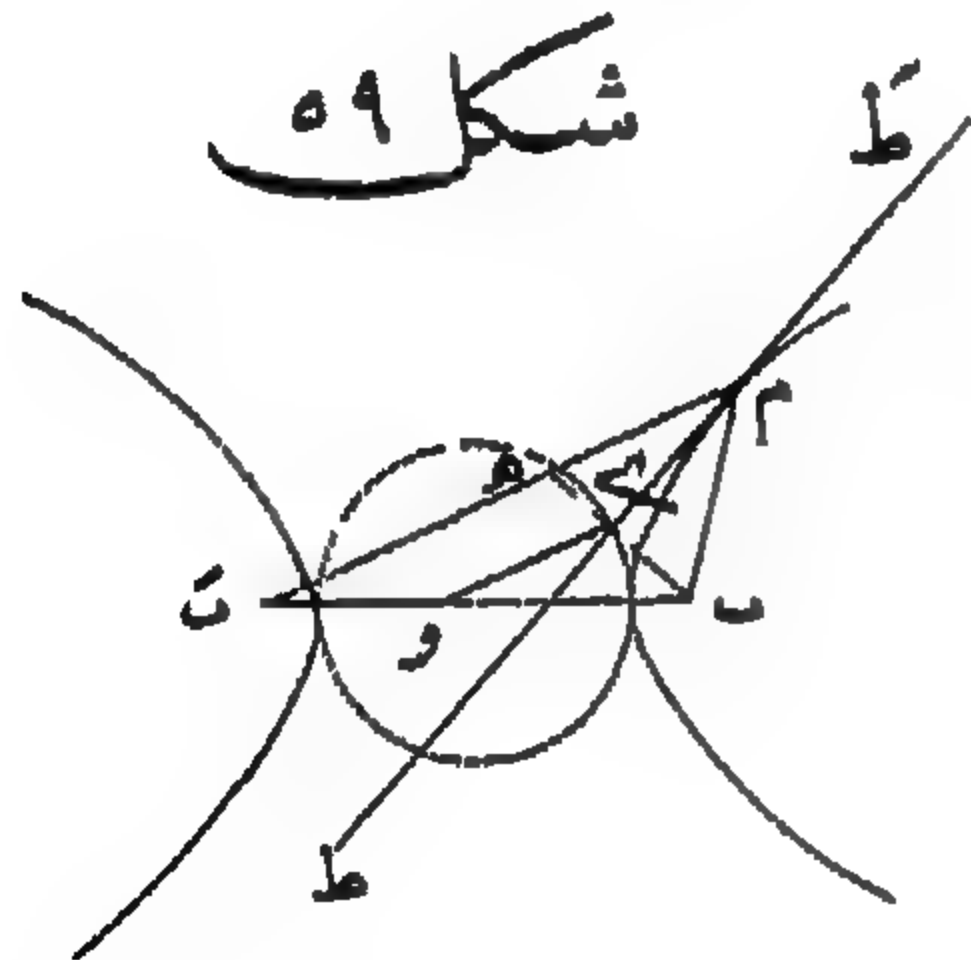
من ينبوع ضوئي موضوع في البورة الثانية $ت$ والمنعكسة على السطح الخارجي من
الصفحة المضبوطة تظهر أنها آتية من نقطة $ب$ ويظن ان النقطة الضوئية موجودة فيها
وتحدث نفس هذه الظاهر الطبيعية فيما اذا عوض ينبوع الضوئي ينبوع حراري
أو مجسم زيان أو نحو

الما يوجد فرق مهم بين خاصيتي منحنى القطع الزائد ومنحنى القطع الناقص يجب ملاحظته
وهو ان الاشعة المنعكسة على منحنى القطع الناقص تمر بالبورة الثانية تحقيا ولذا سميت
هذه البورة بالحقيقية وأما في القطع الزائد فبالعكس بمعنى انه لا يمر بالبورة الثانية
سوى امتدادات هذه الاشعة المنعكسة بحيث لا يكون تقاطع الاشعة هنا
الافتحاليا فقط ولذا سميت البورة في هذه الحالة بالبورة التخيلية

مبدأ النظرية السادسة - المحل الهندسي لمساقط بورتا لقطع الزائد على مماسا
هو محيط دائرة قطرها محور القاطع

مثلا اذا فرض ان $ط$ شكل (٥٩) مماس لهذا المنحنى في نقطة $م$
وانزل عليه من البورة $ب$ العمود $ب م$ ثم مد حتى يتلاقى مع نصف القطر
البوري $ت م$ في نقطة $ك$ نقطة $هـ$ فيما ان المماس منصف لزاوية $ت م ب$ يكون
مثلث $ب م هـ$ متساوي الساقين

و يكون



$$ت هـ = ت م - م هـ = ت م - ب م = ب ك$$

وبناء على ذلك يكون المستقيم $و م$

الواصل بين وسطى الضلعين $ب هـ$

$ب ت$ في المثلث $ب ت هـ$ موازيا

الى قاعدته وهي $ت هـ$ ومساويا

لنصف طولها أعني الى $م$ ويكون

حينئذ مقداره ثابتا وهذا دليل على ان نقطة $م$ موجودة على محيط الدائرة التي
قطرها هو المحور القاطع وهو المطلوب

والدائرة المذكورة تسمى كما في القطع الناقص بالدائرة الاضلية

مبدأ في دائرة الاستدلال - لنسب أيضا هنا على انه يجب معرفة دائرة اخرى
مهمة وهي المرسومة بجعل احدى البورتين مركزا ونصف قطر مساويا الى المحور القاطع
ونسى

وتسمى دائرة الاستدلال

ومن المشاهد ان لكل قطع زائد دائري استدلال كما للقطع الناقص انما الفرق بين
دائري استدلال القطع الناقص ودائري استدلال القطع الزائد هو ان دائرة استدلال
القطع الناقص التي مركزها احد البورتين تكون مشتملة على البورة الاخرى من داخلها وبالعكس
أما في القطع الزائد فلا تكون دائرة استدلاله التي مركزها احدى البورتين مشتملة
من داخلها على البورة الاخرى بل تكون تلك البورة خارجة عنها

ش ٩٤ تعريف آخر للقطع الزائد — اذا اخذت نقطة مثل م شكل (٦٠) من
فرع القطع الزائد المشتمل على البورة ب ووصل نصف قطرهما البورتان وهذا
ب م ر م فان نصف القطر البوري
ب م يقابل دائرة الاستدلال التي
مركزها البورة ب في نقطة مثل نقطة ه

ب م ر م فان نصف القطر البوري

ب م يقابل دائرة الاستدلال التي

مركزها البورة ب في نقطة مثل نقطة ه

ويكون بالضرورة م ه = م ب

وجنسئذ يمكن تعريف القطع الزائد

بأنه هو المحل الهندسي لجميع النقط المتساوية

البعد عن محيط دائرة وعن نقطة موضوعة خارجها

ش ٩٦ يمكن ان يؤخذ من هذا التعريف طريقة لرسم القطع الزائد نقطة فقط لكنها تكون صعبة الاخرى

ش ٩٧ في الخطتين التقريبيين — اذا نظرنا الى التعاريف المتقدمة المتعلقة بالدائرة

الاصولية وبداثري الاستدلال رايانا انه اذا تحركت نقطة م شكل (٥٩) على القطع

الزائد فان نقطة م ترسم الدائرة الاصولية واما نقطة ه فانها ترسم

دائرة الاستدلال التي مركزها البورة ب

لكن حيث ان مستقيمي ب ه و م باقيا على الدوام متوازيين فزاويتا

و م ب ب ه ب لا تزالان متساويتين ويعلم من ذلك انه اذا صار المستقيم

ب م مماسا للدائرة الاصولية صار مماسا ايضا للدائرة الاستدلال

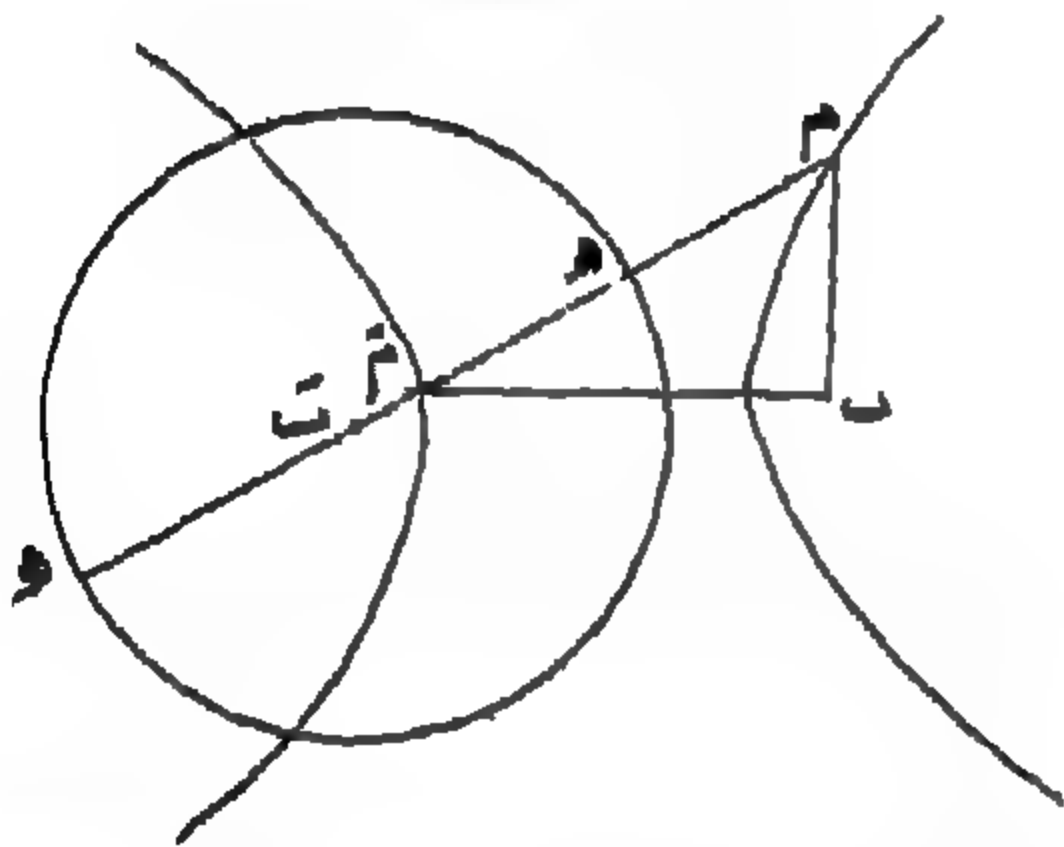
لانه لما صارت زاوية و م ب قائمة صارت زاوية ب ه ب قائمة ايضا

لكن في هذه الحالة ينطبق المماس م ط العمودي على وسط ب ه على نصف

القطر و م وتنقل نقطة تماسه بالقطع الزائد التي هي نقطة تقابلها بامتداد

للمستقيم ب ه الى بعد غير محدود اعني الى ما لا نهاية وذلك لان مستقيمي

شكل ٦٠

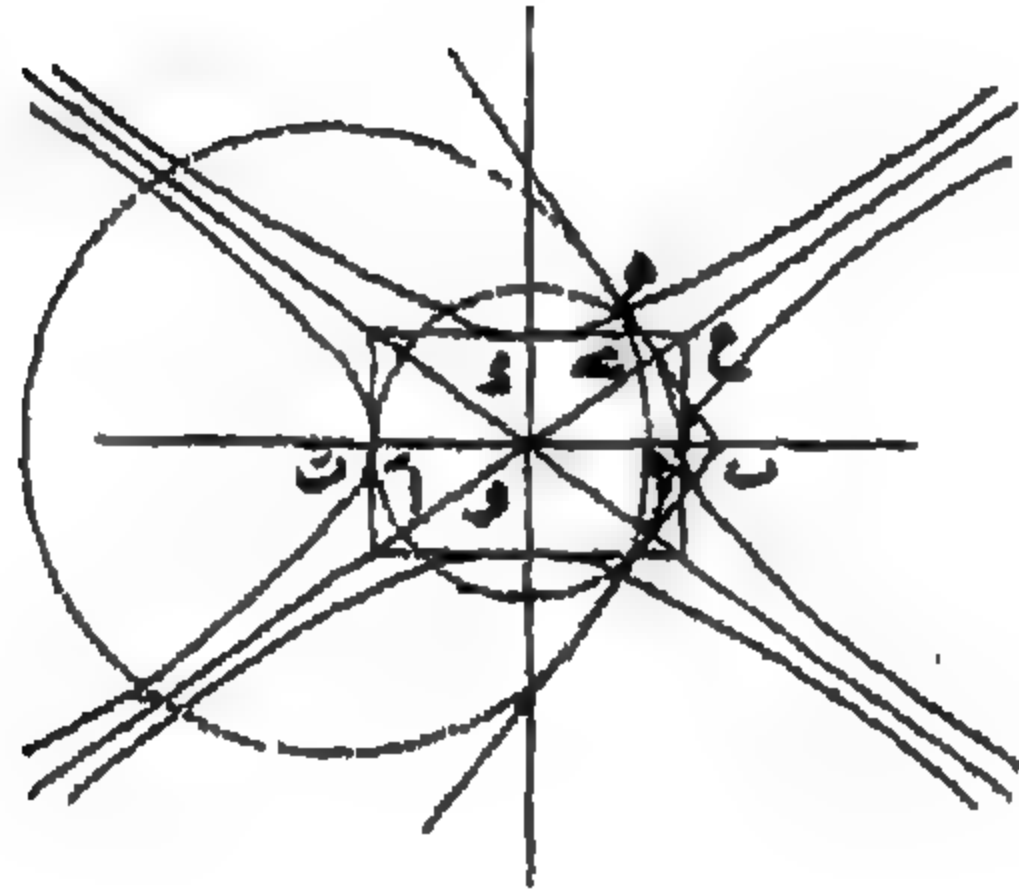


ت هـ ر و س متوازيان دائما

وبهذه الكيفية يحصل مستقيم مماس للقطع الزائد نقطة تماسه موضوعة على
بعد لانها في بمعنى ان نقطة التماس المذكورة لا وجود لها في الحقيقة لكن المخطئ يقرب
شيئا فشيئا من هذا المستقيم بدون ان يمسّه ابدا ولذا سمى هذا المستقيم بالمخطئ
التقري للقطع الزائد

وبمعنى ذلك يرى انه للحصول على المخطئ التقري يرسم مستقيم مماس للدائرة
الاصولية من البوقة ب

شكل ٦١



كما في شكل (٦١)

فيكون مماسا ايضا للدائرة

الاستدلالية ثم نصل

من المركز الى نقطة

تماس هذا المماس بالدائرة

الاصولية فيكون هو المخطئ

التقري

ومن البديهي ان المماس

الثاني للدائرة الاصولية

المخرج من نقطة ب ايضا

يعين لنا خطا تقريبا

آخر للقطع الزائد وكذلك يشاهد من تماثل فرعي الشكل ان المخطئين التقريين
للفرع الايسر هما امتدادا المخطئين التقريين للفرع الايمن وحينئذ يتضح
ان لمخني القطع الزائد خطين تقريين اثنين

سند النظرية الستابعة الخطان التقرييان لمخني القطع الزائد هما قطران
لمستطيل قاعدته المحور القاطع لهذا القطع الزائد وقطعه مساويا للبعدين البوقين
وللبرهنة على ذلك يقام من نقطة ا شكل (٦١) مستقيم عمودي على المحور القاطع
ويمد على استقامته حتى يتلاقى مع المخطئ التقري في نقطة مثل نقطة ع فيكون

مثلثا و ب س هـ و ع ا قائما الزاوية متساويين لان فيها زاوية حادة مشتركة
وفيها ضلع وا مساو لضلع و س لانها نصف قطر دائرة واحدة وينتج

منها

منها ان وع = وب وهذا هو ما اردنا بيانه
 سواء في القطعين الزائدين المتناظرين او المزدوجين - اذ اشترك قطعان الزائدان
 في الخططين التقريبيين وكان البعد بين بورتى كل منهما واحدا لكن المحور القاطع
 لاحدهما موضوع على المحور الغير القاطع للآخر الثاني قيل لهما قطعان زائدان متناظران
 او مزدوجان

وينتج من هذا التعريف ان القطعين الزائدين المتناظرين يلزم ان يكونا موضوعين في
 الزوايا المتضادة الكائنة بين خطيهما التقريبيين المشتركين وانهما فضلا عن ذلك
 غير متساويين لانه اذا فرض ان $\frac{1}{2}$ نصف المحور القاطع للقطع الزائد الذي
 بورتاهما b b' شكل (٦١) كان نصف المحور القاطع للقطع الزائد المناظر
 له وهو a مساويا بالبداية الى $a - b$

مناد في القطع الزائد القائم — اذا فرض في المسئلة المتقدمة اثبات

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\delta \Gamma = \delta \Gamma_{\text{int}} + \delta \Gamma_{\text{ext}}$$

علم من ذلك ان

وكون هذان القطعان الزامعدان المتناظران متساويين وفي هذه الحالة يكون مثلث واع متساوي الساقين وبناء عليه يكون الخطان التقريبيان ضافين مع المحورين زاوية مقدارها 90° فيصيران حينئذ متعامدين على بعضهما والقطع الزائد الذي يكون بهذه الصورة الذي يكون خطاه التقريبيان متعامدين على بعضهما يسمى قطعاً زائداً قائماً

نُشَد في رسم ماسات القطع الزائد — من حيث ان خواص المستقيم المماس
للقطع الزائد مشابهة بالكلية لخواص مماس القطع الناقص فهي توصلنا بالضرورة
الى استخراج طرق لرسم ماسات هذا القطع الزائد مشابهة تقريبا لطرق رسم ماسات
القطع الناقص بحيث يمكن حينئذ بسبب وجود هذه المشابهة الاختصار في
التعبير عليها

المسئلة الأولى

المطلوب وهم مستقيم مما س للقطع الزائد من نقطة مفروضة عليه

مثلاً لنسكن نقطة م شكل (٦٢) النقطة العلوية فنصل خطي م ب م
ر م والخط الثاني منهما يتلاقى مع دائرة الاستدلال في نقطة مثل نقطة هـ
فاذا وصل مستقيم ب هـ الذي يقطع الدائرة الاصلية في نقطة مثل نقطة عـ

ثم وصل من نقطة التماس المعلومة
وهي م الى نقطة ه بمستقيم كان

هو المماس المطلوب

وفي حالة ما تكون هاتان الدائرتان
غير متشبهتين كما في نفس الشكل

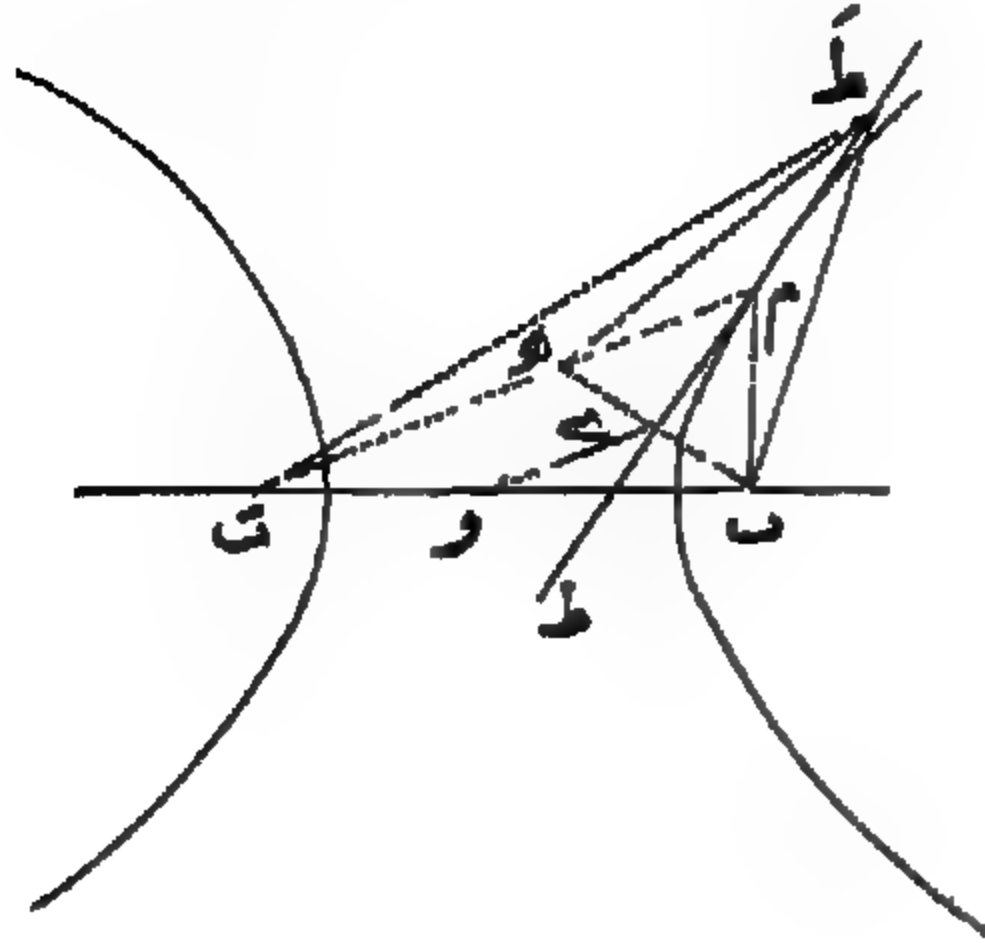
المذكور يلزم اخذ بعد م ه

مساويا الى م ب ثم ينزل من

نقطة م عمود على خط ب ه

فيكون هو المماس المطلوب

شكل ٦٢



المسألة الثانية

المطلوب رسم مستقيم مماس لقطع زائد من نقطة خارجة عنه
لذلك يفرض ان المسألة محلولة وان نقطة ط هي النقطة المعلومة كما في شكل

(٦٤) وان المستقيم ط م هو المماس المطلوب

ويؤخذ البعد م ه مساويا الى م ب

فتكون نقطة ه موضوعة على دائرة

الاستدلال التي مركزها نقطة ب

وكذا من حيث ان بعدى ط ب ط ه

متساويان فتكون نقطة ه موجودة

أيضا على الدائرة المرسومة بجعل نقطة

ط مركزا ونصف قطر مساو

الى ط ب وحينئذ تكون هي نقطة

تقاطع محيطي هاتين الدائرتين ومتى علت نقطة ه بهذه المسابة فلا يبقى علينا

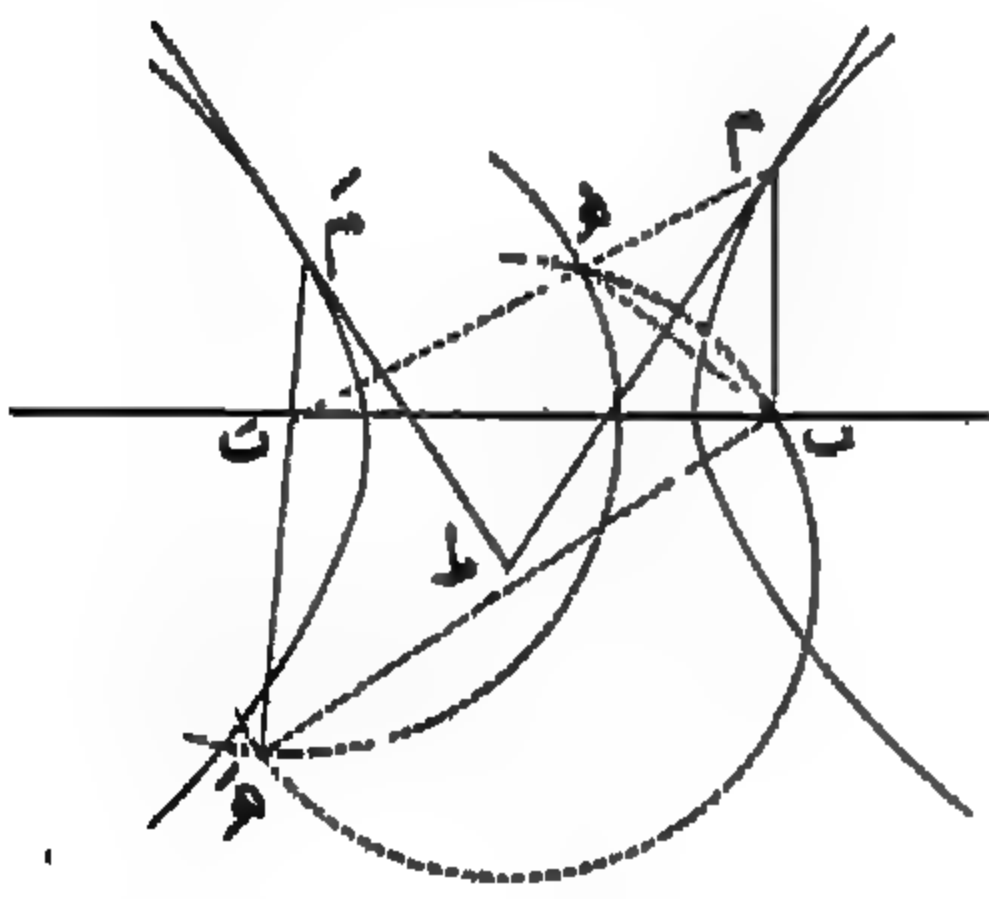
سوى ان نصل المستقيم ب ه وننزل من نقطة ط عمودا على هذا المستقيم فيكون

هو المماس المطلوب

وحينما تكون الدائرة الاصلية مرسومة فيكون ان نصل من نقطة ط الى نقطة

تقابل المستقيم ب ه بهذه الدائرة اما نقطة التماس فتعین بوصل المستقيم

شكل ٦٣



ت ه ثم يمد على استقامته حتى يتلاقى مع المماس في نقطة تكون هي نقطة التماس المطلوبة
ومن المشاهد ولا بداهة انه يوجد لهذه المسئلة حلان لان محيطي الدائرتين يتقاطعان
دائما في نقطتين فيكون المماس الثاني هو المستقيم ط م وثانيا يلزم لاجل امكان
حل هذه المسئلة ان يكون محيطا الدائرتين المذكوران متقاطعين لكن من المعلوم ان
هذين المحيطين لا يمكن ان يكونا متداخلين لان احدهما مارة بنقطة ب الكائنة خارج
المحيط الآخر فحينئذ يكفي ان يكون البعد بين مركزيهما اصغر من مجموع نصفي قطريهما
بمعنى ان يكون

$$ط ت > ت ه + ط ب$$

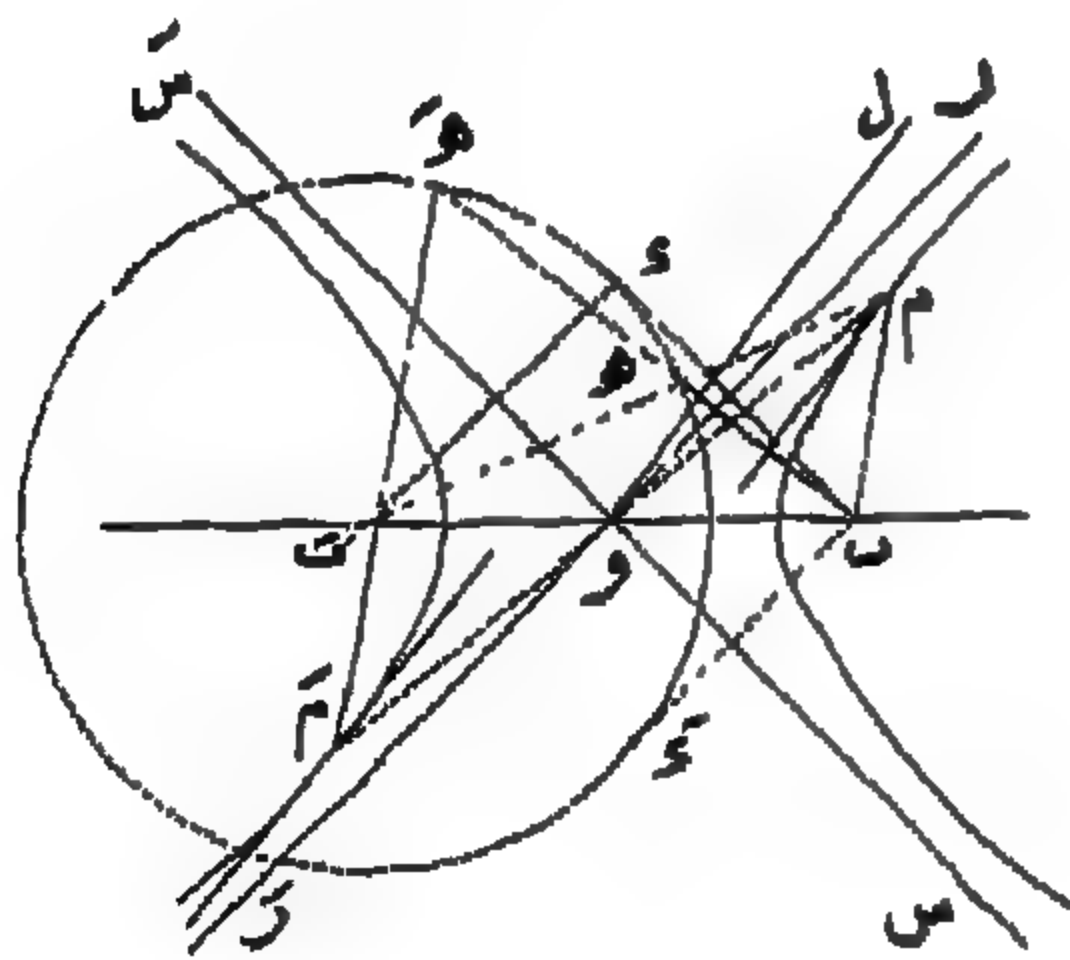
$$\text{أو } ط ت - ط ب > ت ه = ر ٢$$

وهذا يدل على انه يلزم ان تكون نقطة ط موجودة بين فرعي المنحنى كما في بند (٨٩)

المسئلة الثالثة

استد المطلوب رسم مستقيم مماس للقطع الزائد وموازٍ لاجتاه معلوم
مثلا يكن ول شكل (٦٤) الاجتاه المعلوم فاذا انزلنا من البورة ب
عمودا على خط ول فهذا العمود يقابل دائرة الاستدلال المرسومة بجعل نقطة ت
مركزا في نقطة مثل نقطة ه

شكل ٦٤



ويصير المستقيم المماس المطلوب
عموديا على وسط بعد ب ه
أما نقطة تماسه بالمنحنى فهي
نقطة تلاقيه بامتداد المستقيم
ت ه

ومن المشاهد انه يوجد لهذه
المسئلة حلان لان مستقيم
ب ه يتلاقى مع دائرة الاستدلال

في نقطة ثانية مثل نقطة ه وانه لاجل ان تكون هذه المسئلة ممكنة الحل يلزم
ان يكون مستقيم ب ه قاطعا لدائرة الاستدلال اعني ان يكون محصورا داخل
الزاوية ب ب و المتكونة بين مماسي هذه الدائرة الخارجين من نقطة ب

وحيث نعلم من بند (٩٧) أن الخطين التقريبيين موازيان لنصف القطرين d, d' ،
فيؤلف الشرط المتقدم حينئذ إلى الشرط الآتي وهو أنه يلزم أن يكون مستقيم ولك
محصولاً في زاوية روس المتكوّنة بين الخطين التقريبيين

وللاحظ كما في القطع الناقص أن نقطتي m, m' اللتين هما نقطتا تماس مماسين متوازيين
يلزم أن تكونا متماثلتي الوضع بالنسبة لمنحنى mn (انظر في بند إلى المسئلة الثالثة)
بند تبين من الواضح أنه يمكن إجراء هذه العمليات بدون احتياج لأن يكون
منحنى القطع الزائد مرسومًا

بند في رسم العمودي على منحنى القطع الزائد - انظر إلى بند (١٩) و (٢٠) و (٢١)
في مقدمة هذا الكتاب وهناك تجد الطرق العمومية لرسم عموديات أي منحنى
والقطع الزائد بالتحليل

الفصل الثالث

في تعيين مساحة جزء من القطع الزائد وفي الجسم الزائدي
بند من البديهي أنه لا يمكن التصدي لتعيين مساحة سطح القطع الزائد بأكمله
لأن هذا المنحنى ليس مقفلاً ولا منتهياً بل يمكن التصدي لأخذ مساحة جزء محدود
من سطح هذا المنحنى لكن حيث أن الطرق المعتادة لذلك متوقفة على علوم عالية
لم يكن وصل طالب دراسة المنحنيات الابتدائية ولربما وجد طرق مضبوطة لهذا الخصوص
فقد التزمنا بحالة ذلك على ما هو مذكور من الطرق التقريبية في بند (١٥)، (١٦)
من المقدمة

في كيفية تولد الجسم الزائدي وفي تعيين حجمه

بند إذا تصورنا أن منحنى القطع الزائد قد دار حول أحد محوريه رأينا أنه يرسم
سطحاً متحركاً يسمى سطح الجسم الزائدي فإذا كان محور الدوران هو المحور الغير القاطع
للمنحنى المتحرك كان بالضرورة السطح الحادث سطحاً متصلًا يسمى الجسم الزائدي ذا الطيتين
وبالعكس إذا حصل الدوران حول المحور القاطع كان السطح الحادث مركباً من جزئين
منفرعين عن بعضهما وسمى الجسم الحادث بالجسم الزائدي ذي الطيتين
بند حيث أن الطرق التي بها يتعين حجم جسم القطع الزائد بالضبط مؤسستة
على العلوم العالية فلا يمكن ذكرها هنا في هذا المختصر إلا بتداني أنما يلزمنا هنا

أن نذكر

ان نذكر طريقة تقريبيه ابتدائية بها يمكن تعيين حجم جزء من هذا الحجم واخلافه
من المجسمات المتحركة وهي الطريقة الآتية

مثلاً اذا كان المطلوب تقدير الحجم الحادث من دوران الشكل م ه ل ط
شكل (٥٦) فنقسمه الى اشياء منحرفات ارتفاعاتها المتساوية صغيرة جداً

بحيث يمكن اعتبارها كاشياء
منحرفات مستقيمة الاضلاع

وكل واحد منها يكون

بدوراناً منحدراً طاقناً يمكن

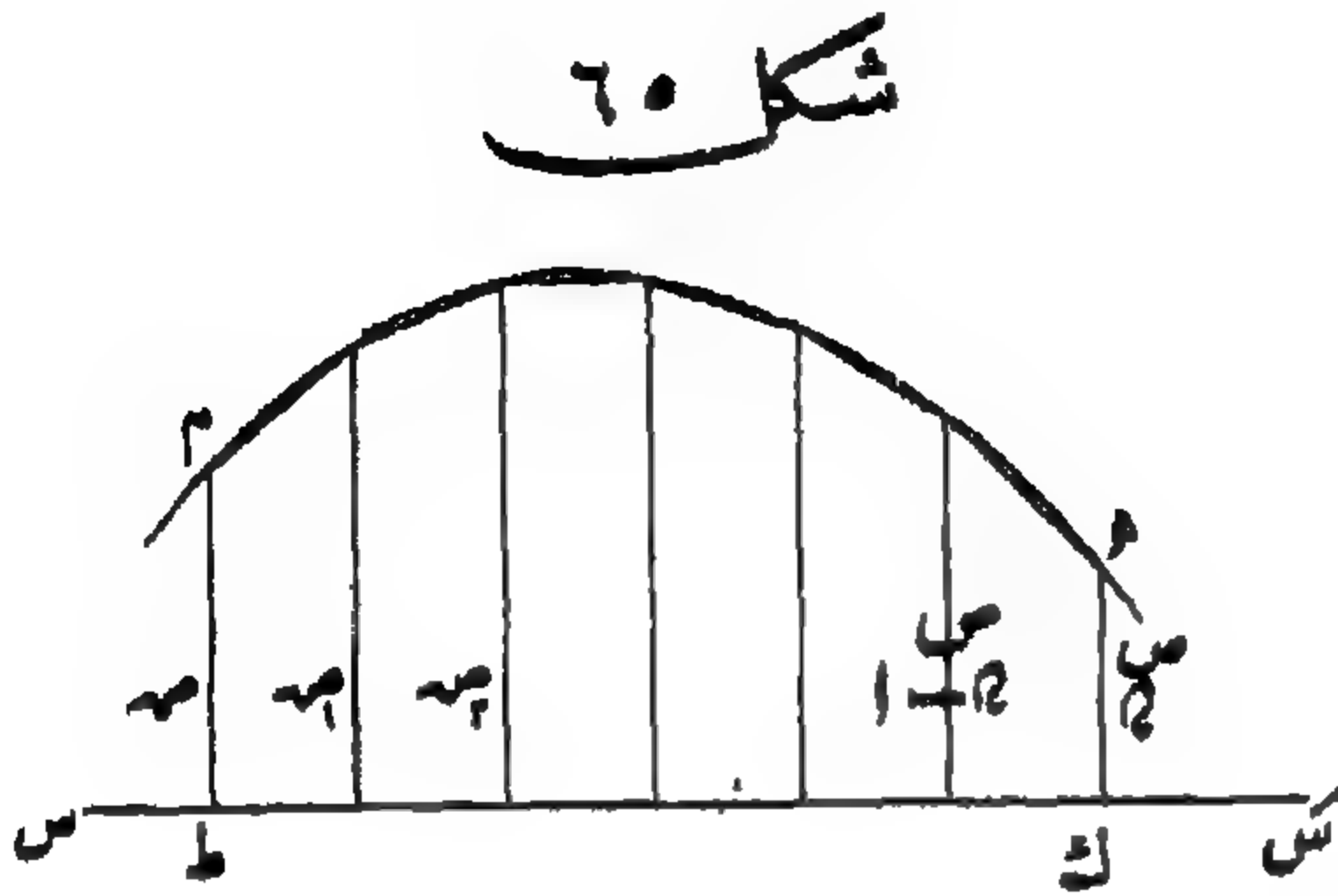
تقدير حجمه بالسهولة فنجوع

أحجام هذه المخاريط يكون

أقرب الى الحجم المطلوب

كلما كان الارتفاعات المشتركة

صغير جداً



الباب الرابع

في القطع المكافئ ومجسمه وفيه فضول

الفصل الأول

في تعريف القطع المكافئ وطرق رسمه وخواصه الهندسية

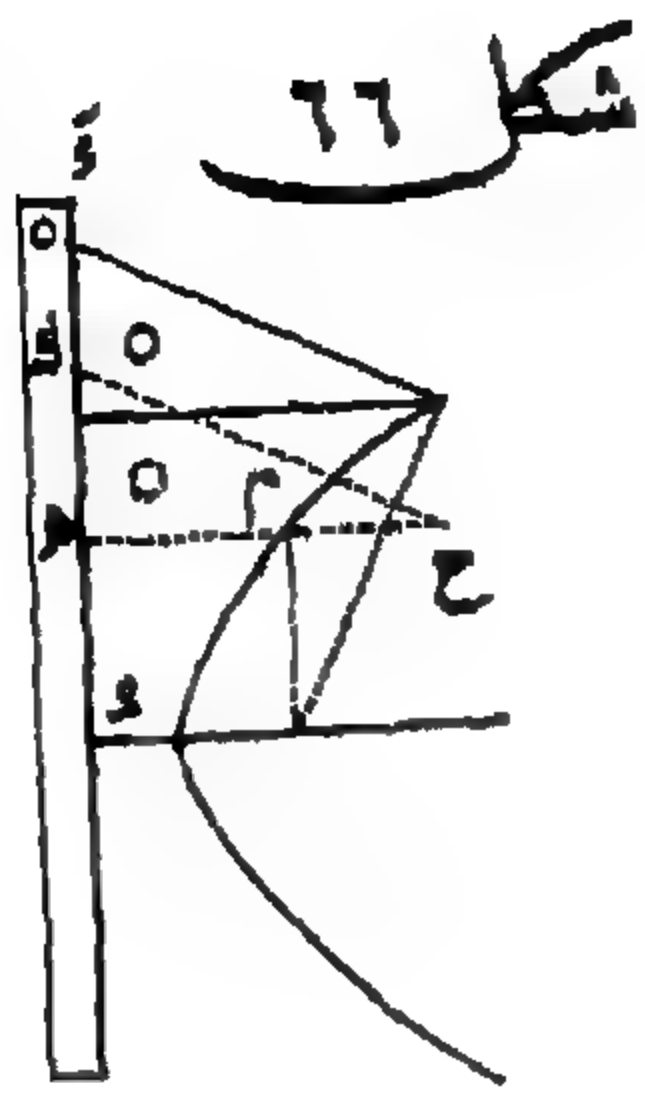
سند القطع المكافئ هو منحن مستوي جميع نقطه متساوية البعد
عن نقطة ثابتة في مستويه تسمى بؤرة وعن مستقيم ثابت فيه ايضاً يسمى دليلاً
لهذا المنحنى

ومن البديهي ان هذا المنحنى يمتد الى ما لا نهاية لان بعدى نقطة من نقطته
عن البؤرة وعن المستقيم الدليل يمكنها الازدىاد بمقادير ما يراود مع كونها
متساويتين دائماً

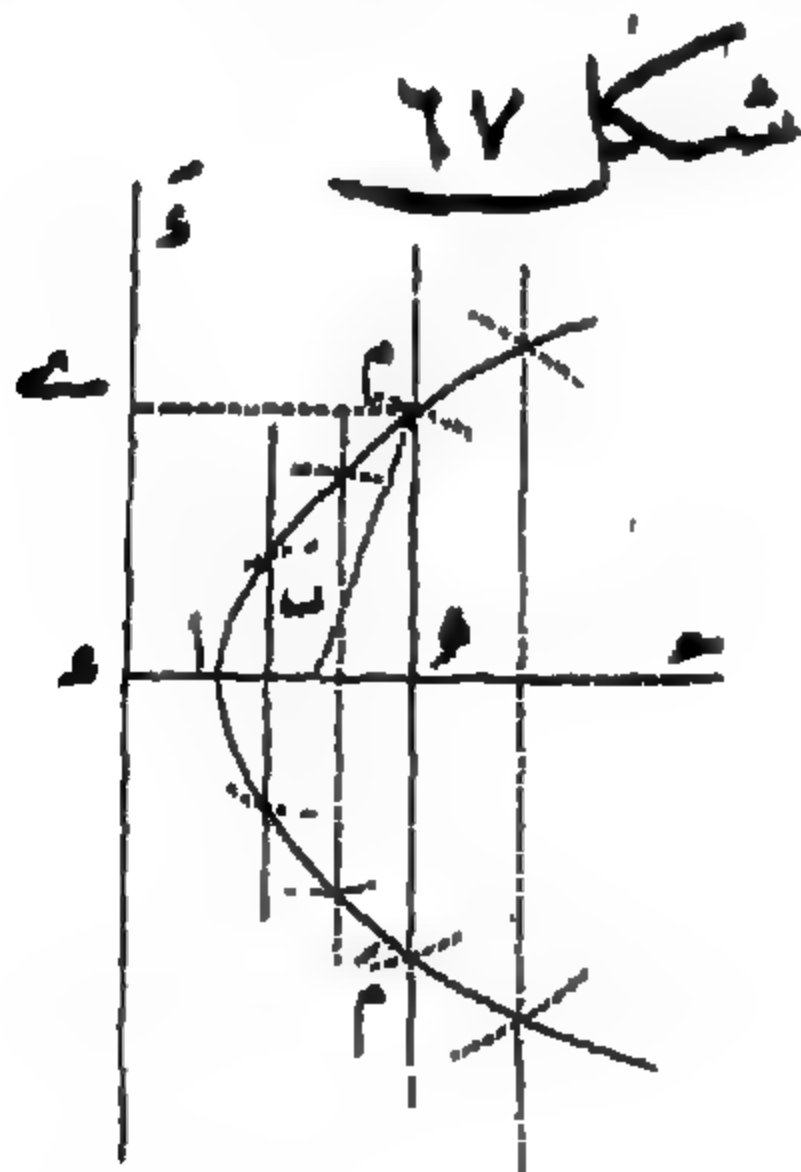
في طرق رسم القطع المكافئ

سند اولاً طريقة رسمه بالاستمرار

ينج من التعريف المتقدم لهذا المخفض
طريقة سهلة لرسم جزء منه بالاستمرار
ولذلك توضع مسطرة بطول الدليل
و شكل (٦٦) ثم يوضع بجانب
هذه المسطرة أحد الضلعين المتعامدين
من المثلث الخشب وتأخذ خطاً طوله
مساو للضلع الثاني العمودي على المسطرة
ثم يثبت أحد طرفي هذا الخيط في البورة
وطرفه الثاني في نهاية المثلث



ويزلق بعد ذلك المثلث بطول المسطرة ويحرك قلم الرسم بجانب ضلع ح هـ
بحيث يكون شاداً للخيط على الدوام
من الواضح أن القلم يرسم في حركة جزءاً من القطع المكافئ لانه
في الواقع عند ما ينتقل المثلث من وضعه الأصلي الى الوضع ح هـ ك ينقص
كل من الخيط وضلع ح هـ المتساويين بكمية واحدة هي ح م
مثلاً ثانياً يرسم نقطة فنقطة — لأجل رسم القطع المكافئ بالضبط
تعين منه عدة نقاط بواسطة الطريقة الآتية وتجمع بمنحن متصل فيكون هو
القطع المكافئ مثلاً اذا فرض أن نقطة ب شكل (٦٧) هو بورة



القطع المكافئ وأن المستقيم د هـ
دليله فيترى من هذه البورة عمود على
المستقيم الدليل ك العمود د و
وتأخذ عليه نقطة اختيارية مثل
نقطة هـ ثم يرسم منها مستقيم مواز
الى الدليل د هـ وتجعل نقطة ب
مركزاً ونصف قطر مساو الى د هـ
يرسم محيط دائرة فيقطع المستقيم المذكور

في نقطة مثل م وتكون هذه النقطة بالبداية من نقط القطع المكافئ
لانه قد أخذ بالعكس

$$ب م = د ه = م م$$

وبهذه الكيفية يمكن الحصول على عدة نقط من المنحنى بقدر ما يراد انما حيث ان
محيط الدائرة يقابل المستقيم على العمود في نقطتين فتبين بنفس هذه العملية
نقطة اخرى مثل م

وبالضرورة متى كانت نقطة ه موضوعة على بين البورت ب يكون

$$ب م = د ه < ب ه$$

وبناء عليه يلزم ان يكون محيط الدائرة قاطعا للمستقيم ه م لكن متى كانت
نقطة ه موضوعة بين البورت والدليل لزم الحصول تقاطعها ان يكون

$$د ه < ب ه$$

وحينئذ اذا نصف بعد د بنقطة مثل نقطة ا ينبغي ان تكون نقطة ه
متباعدة عن الدليل بعد ا كبر من بعد نقطة ا عنه
(تنبيه) من البديهي ان القطع المكافئ لا يتركب الا من فرع واحد فقط
موضوع مع البورت في جهة واحدة من المستقيم الدليل

الخاص بهذه النظرية للقطع المكافئ

س ١٢ (النظرية الاولى) القطع المكافئ منحنى محدد

ولا ثبات هذه النظرية يفعل كما فعل في كل من القطع الناقص والزايد
اعني بحيث عن نقط تقابل مستقيم بقطع مكافئ معلوما وبعبارة اخرى
يقال المطلوب ايجاد نقطة على مستقيم معلوم بحيث تكون متساوية البعد
عن نقطة اخرى ثابتة وعن مستقيم اخر معلوم

مثلا لتكن نقطة ب البورت ومستقيم م ه الدليل ومستقيم
م م المستقيم المعلوم كما في شكل (٦٨) ونفرض ان المسألة محلولة وان
نقطة م هي النقطة المطلوبة فعلى حسب منطوق المسألة يكون

$$ب م = م ه$$

واذا بحثنا عن نقطة ب المماثلة للبورت ب بالنسبة لمستقيم م م
كان ايضا

$$ب م = م ب$$

بحيث ان الدائرة التي مركزها نقطة م ونصف قطرها البعد م تكون مارة

بالثلاث نقط ب ، ب ، هـ

فضلا عن كونها تصير مماسة

للدليل في نقطة هـ وبناء على

ذلك تول المسألة الى مسألة

أخرى حلها معلوم

وهي المطلوب رسم محيط دائرة

ما بين نقطتي ب ، ب العلويتين

بشرط أن يكون مماسا للمستقيم

المعلوم د د

وبحيث ان مستقيم م هـ مماس فيحدث القانون الآتي

$$م هـ = م ب = م د$$

وحينئذ لتعيين نقطة هـ يبحث عن الوسط المتناسب بين خطي م ب ،

م د ويؤخذ البعد الناتج على الدليل بالابتداء من نقطة م وليرسب بعد

ذلك سويا انه يقام من نقطة هـ عمود على خط م هـ ويمتد حتى يتلاقى مع

المستقيم م م في نقطة تكون مركزا للمحيط المطلوب وهي من النقط التي تحل

المسألة

لكن حيث انه يمكن اخذ بعد م هـ في جهتي نقطة م فيري انه يوجد نقطتان

مثل م م كل منهما يحل المسألة اما في حالة ما تكون نقطة ب موجودة

على نفس الدليل فلا تحصل الا نقطة واحدة

واخيرا قد تكون المسألة مستحيلة الحل وذلك اذا وقعت نقطة ب في الجهة

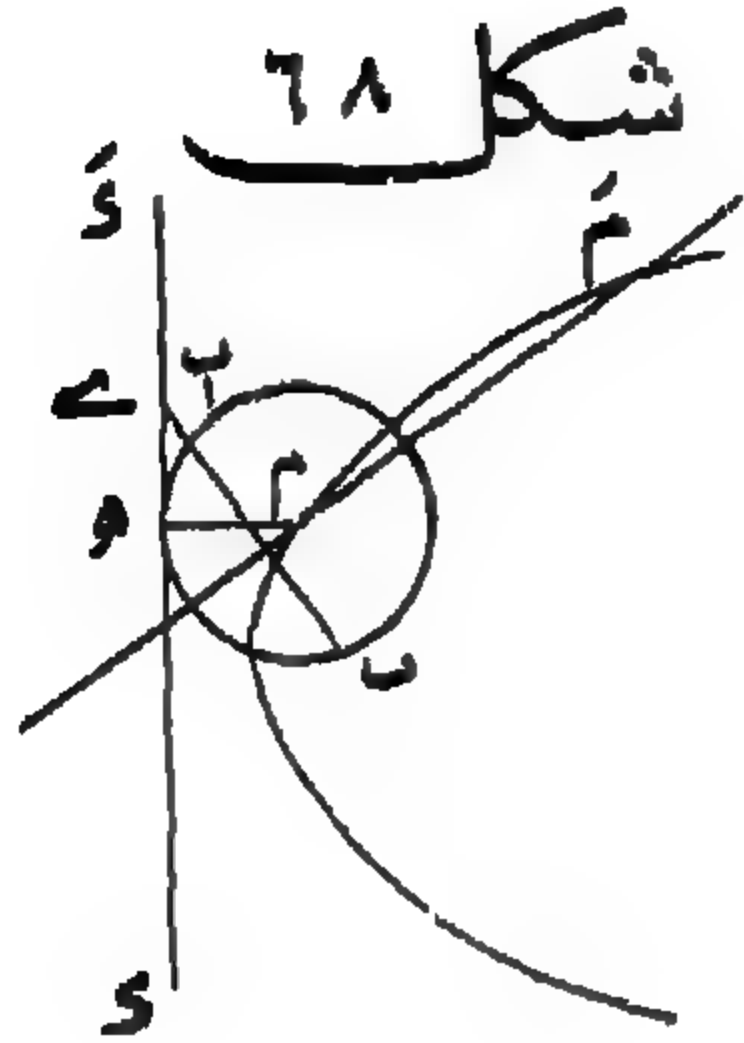
الثانية من الدليل اعني اذا لم تكن مع البؤرة في جهة واحدة منه

وعلى كلتا الحالات قد ظهر من هذه الاجراءات ان المسألة يكون لها في النهاية

العظمى حالتان وبناء على ذلك يثبت ان المستقيم لا يمكنه ان يقطع القطع الكافي

في اكثر من نقطتين وهذا هو ما اردنا بيانه

في محور القطع المستقيم في مؤسسه



مثال النظرية الثالثة - العمود النازل من بورة القطع المكافئ على دليله محور هذا المنحنى
لأننا إذا افترضنا بند (١١١) في الطريقة الثانية لرسم هذا المنحنى أن كل قوس دائرة معين
نقطتين منه وحيث معلوم أنه إذا تقاطع محيط دائرة مع مستقيم كانت نقطتا
تقاطعهما متماثلتي الوضع بالنسبة للعمود المنزل من مركز تلك الدائرة على هذا المستقيم
فحينئذ تكون جميع نقط هذا المنحنى متماثلة الوضع مشى بالنسبة للعمود المنزل من
البورة على الدليل ويكون هذا العمود محور هذا المنحنى وهو ما اردنا بيانه
نتيجة - نقطة وسط البعد الكائن بين البورة والدليل من القطع
المكافئ هي رأس هذا المنحنى

ولبيان ذلك يقال حيث ان هذه النقطة موجودة على المحور فيكون فقط الاثبات
على انها من نقط المنحنى وهذا امر بداهي بناء على تعريف المنحنى المذكور

مثال في البعد الثابت للقطع المكافئ - من الواضح ان منحنى القطع المكافئ
يصير معينا متى علم البعد الكائن بين بورته ودليله وهذا البعد هو ما يسمى بالبعد
الثابت لهذا القطع المكافئ

مثال النظرية الثالثة - منحنى القطع المكافئ يقسم مستوييه الى قسمين بشرط
ان يكون بعدا في نقطة مفروضة داخل احدهما عن البورة اكبر من بعدها عن الدليل
وبالعكس ان بعدا في نقطة تفرض داخل القسم الثاني عن البورة يكون اصغر
من بعدها عن الدليل

مثلا اذا فرضنا نقطة ط شكل (٦٩) نقطة موجودة خارج القطع
المكافئ وانزل من هذه النقطة

عمود على الدليل ثم مد حتى تلاقي

مع المنحنى في نقطة كنقطة م

ووصل مستقيم ب م فيكون

$ب ط < ب م - م ط$

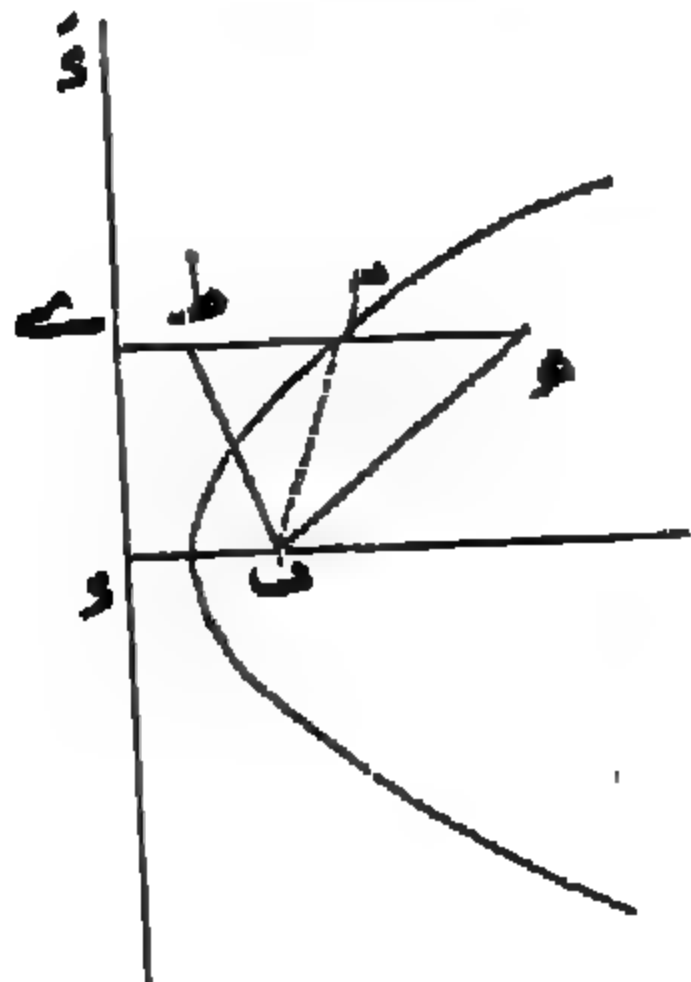
لكن حيث ان $ب م = م ع$

فحينئذ يكون

$ب ط < م ع - م ط = ع ط$

وكذا اذا كانت نقطة ط موضوعة

شكل ٦٩



على شمال الدليل فمن البديهي أيضا أن يكون
 $\text{ب} \text{ط} \text{م} \text{ه} \text{ط}$

أما إذا فرض الآن أن نقطة مثل ه موجودة داخل المنحنى حدث من مثلث
 $\text{ب} \text{م} \text{ه} \text{ه} \text{ب} \text{ه} \text{ب} \text{م} + \text{م} \text{ه}$

أو يكون $\text{ب} \text{ه} \text{ب} \text{م} + \text{م} \text{ه} = \text{م} \text{ه}$
 وبناء على هذه النظرية يتضح أنه على حسب وجود النقطة خارج القطع المكافئ
 أو عليه أو داخله يكون بعدها عن الدليل أصغر أو مساوياً أو أكبر من بعدها
 عن البؤرة

الفصل الثاني

في المماس لمنحنى القطع المكافئ والعمودى عليه
 سالد النظرية الرابعة المستقيم المماس للقطع المكافئ يصنع مع كل
 من نصف القطر البؤري لنقطة التماس والمستقيم المرسوم منها بالتوازي على
 المحور ذواتين متساويتين

مثلاً ليكن المستقيم م م شكل (٧٠) قاطعاً للقطع المكافئ في نقطتين
 متقاربتين من بعضهما ففصل نصف قطريهما البؤريين وينزل منها عمودان على
 الدليل كالعمودين م ط م ط ثم يبحث عن نقطة ه المائلة للبؤرة بالنسبة
 للمستقيم القاطع وينزل منها عمود كالعمود ه ه على الدليل

وأخيراً توصل المستقيمت م ه م ه ح ب فيحدث حينئذ

$$\begin{aligned} \text{م} \text{ه} &= \text{م} \text{ب} = \text{م} \text{ط} \\ \text{م} \text{ه} &= \text{م} \text{ب} = \text{م} \text{ط} \\ \text{ح} \text{ه} &= \text{ح} \text{ب} \end{aligned}$$

ومن البديهي أيضاً أن تكون نقطة ه موجودة في جهة واحدة مع البؤرة
 بالنسبة إلى الدليل كما في بند (١١٢) وبناءً على ذلك يكون

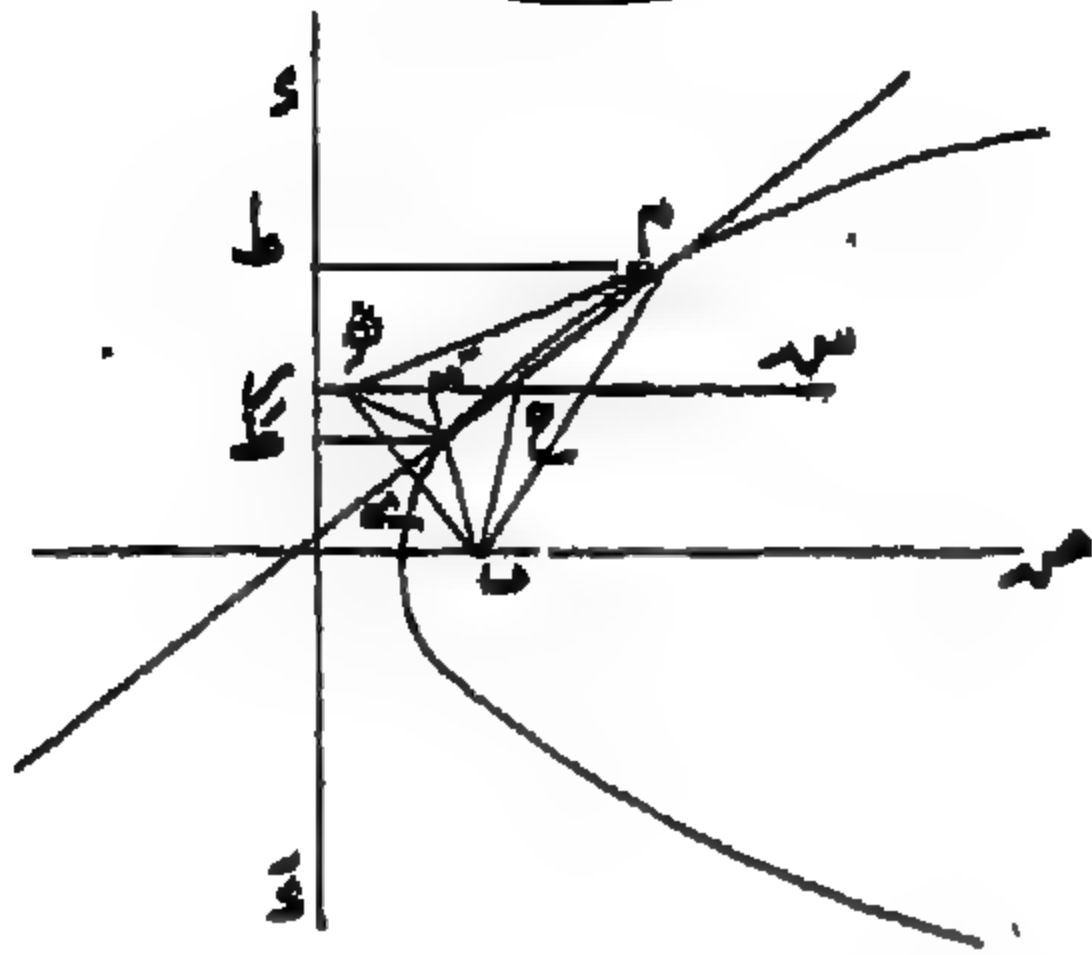
$$\text{ح} \text{ه} \text{ب} \text{ح}$$

$$\text{ح} \text{ب} \text{ب} \text{ح}$$

أو
 فإذاً تكون نقطة ح موجودة داخل القطع المكافئ وبناءً عليه

تكون

شكل ٧٠

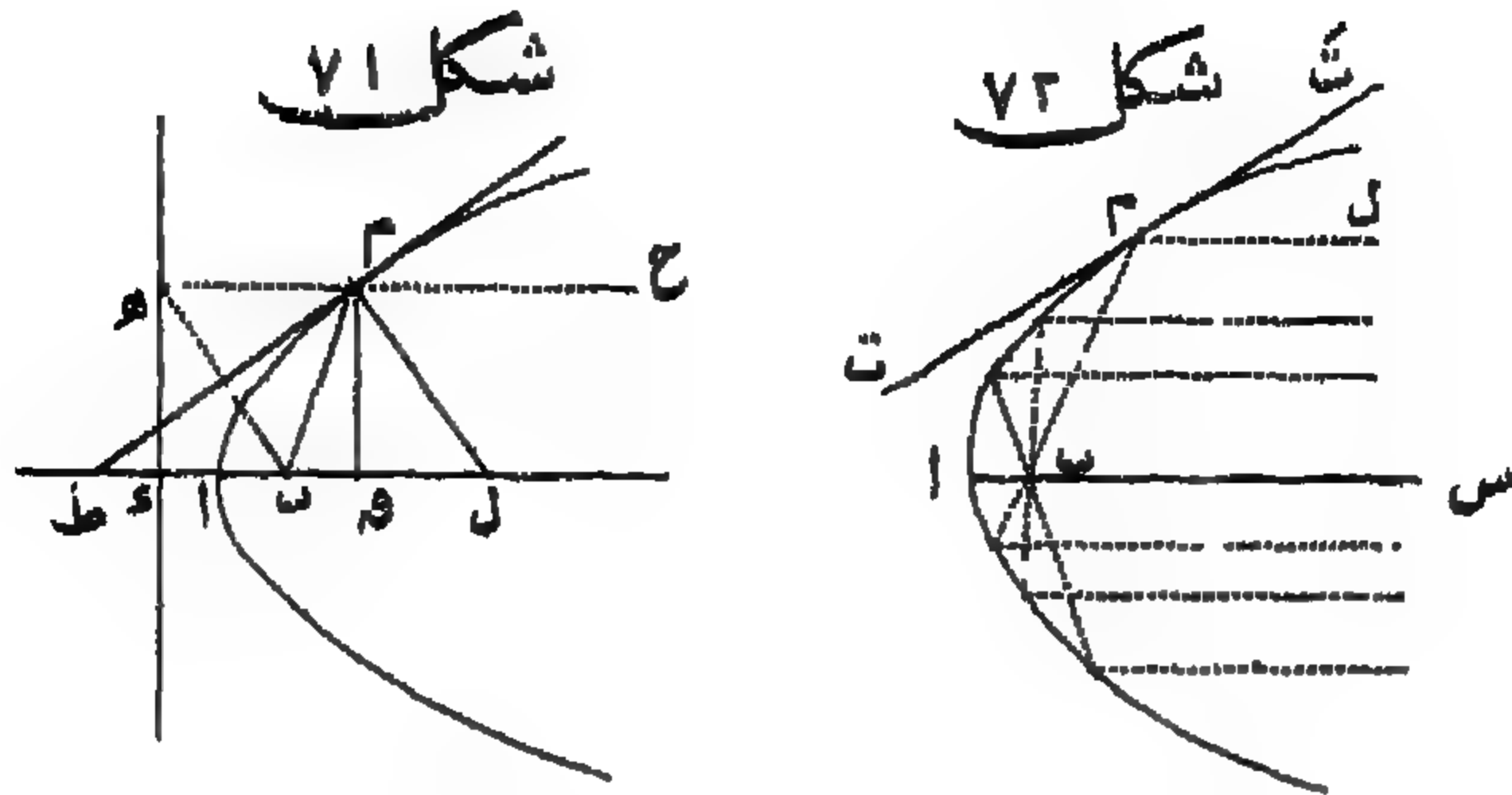


تكون واقعة بين نقطتي م ر م
وننتج من ذلك أنه متى انطبقت
نقطتا م ر م على بعضهما وصارتا
نقطة واحدة تتخذ نقطة ح معها
وتصير نقطة تمام للناس
وتتقرر هذا يقال حيث ان مثلث
ح ه ب متساوي الساقين
فيكون القاطع م م العمودي
على قاعدته منصفاً لزاوية

ه ح ب وبناءً على ذلك تكون زاوية م ح ب ر م ح س متساويتين
لأن زاوية م ح س = م ح ه لتقابلها بالرؤس وحيث ان هذه الخاصية
حاصلة مما كان وضع القاطع فتكون صحيحة أيضاً متى صار هذا المستقيم مماساً
للمنحن وهذا هو ما اردنا بيانه

١٧٠ الد نتجراً أولاً - المستقيم العمودي على القطع المكافئ في
أي نقطة من نقطه يقسم الزاوية الكائنة بين نصف القطر العمودي لنقطة التماس
وبين المستقيم المرسوم منها بالتوازي للمحور الى قسمين متساويين
مثلاً ليكن مستقيم ط م شكل (٧١)، مماساً للقطع المكافئ ومستقيم
م ل عمودياً عليه فبناءً على النظرية المتقدمة تكون زاويتا ط م ب ر ه م ط
متساويتين وحينئذ لا شك ان تكون زاويتا ب م ل ح م ل متساويتين
أيضاً

١٧١ الد في المرايات المكافئة - اذا فرض ان القطع المكافئ عبارة
عن صفحة ضيقة مصقولة ووضع في نقطة ب شكل (٧٢) التي هي بؤنة
ينبوع ضوئي أو ينبوع حراري فان الاشعة الحرارية المنعكسة
على الوجه الداخلي من هذا القطع المكافئ تتجه في اتجاهات موازية الى المحور
وبالعكس اذا وضع ينبوع ضوئي على المحور اس في بعد عظيم من المنحنى
بحيث يمكن اعتبار الاشعة الالقية منه موازية للمحور فان هذه الاشعة تجتمع
في البؤرة ب بعد انعكاسها على داخل المنحنى



وكذلك اذا قذفت (بلية) مرنة أعنى صكة مرنه من البورة ب في اتجاه
حيثما اتفق مثل ب م صدت هذه البلية بواسطة القطع المكافئ
وتأخذ اتجاهها مثل م ل موازيا الى المحور وبالعكس اذا قذفت الكرة
في اتجاه مواز للمحور فانها تمر بالبورة بعد انعكاسها على المنحنى
واما في حالة ما يكون المنحنى مضغوذا من الخارج وسقطت عليه اشعة
موازية الى المحور تفرقت بعد انعكاسها عليه كما اذا كانت خارجة من البورة
لكن في هذه الحالة لا تكون نفس الاشعة هي المارة بالبورة بل امتداداتها
فقط ويتكون حينئذ في هذه النقطة بورة تخيلية
١٩ الدقة ثانياً — نقطتها س أي تماس للقطع المكافئ ونقطة
تلاقي هذا التماس بالمحور تكونان متساويتين البعد عن البورة وكذلك
تكون نقطتا تقابل العمودى على القطع المكافئ به ومحوره متساويتين
البعد عن البورة ايضا

فلا ثبات الحالة الأولى يقال حيث ان زاويتي ه م ط ، ب م ط
شكل (٧١) متساويتان وان زاويتي ه م ط ، م ط ب متساويتان
ايضا لانهما متبادلتان داخلتان فحينئذ يكون مثلث ط م ب متساوي
الساقين ويكون $ب م ط = ب م ل$ وهو المطلوب
ولا ثبات الحالة الثانية يقال حيث ان مثلث ط م ل قائم الزاوية
فتكون $ط + ل = ط م ب + ب م ل$

وبما ان زاوية $ط = ط م ب$ فتكون زاوية $ل = ب م ل$
ويكون

ويكون $م = ب = ل$ تحت العمودي — تحت العمودي هو مسقط الجزء من العمودي المحصور بين المنحنى والمحور على نفس هذا المحور فبناءً على هذا التعريف يكون تحت العمودي الموجود في شكل (٧١) هو بعد $ل$ نتيجةً ثالثاً — تحت العمودي لأي قطع مكافئ يكون ثابتاً ومساوياً لبعده الثابت

لأنه من المعلوم أن مستقيم $ب ه$ شكل (٧١) عمود على المماس فيكون بناءً على ذلك هو انزياح للعمودي على المنحنى ويصير حينئذ الشكل $م ه ب ل$ شكلاً متوازي الأضلاع ويؤخذ منه أن بعد $ب ه = م ل$

إذا تقرّر هذا يكون مثلثا $م ه ب$ و $م ه ل$ قائما الزاوية متساويين لأن وتريهما متساويان وفيهما ضلع $م ه = م ه$ وينتج منها أن $ه ل = ب ل$

وهذا هو ما اردنا بيانه
سواءً تحت المماس — تحت المماس هو مسقط الجزء من المماس المحصور بين المحور ونقطة التماس على نفس هذا المحور
نتيجةً رابعةً — تحت مماس أي قطع مكافئ يكون منصفاً على الدوام رأس هذا المنحنى

لأنه إذا كانت نقطة $ب$ شكل (٧١) هي وسط البعد $ط ل$ وكان بعد $ه ل$ مساوياً لبعد $ه ب$ فيكون بالبداية $ط ب = ب ه$ وحيث أن $ط ب = ب ه$

فإذا جمعنا هاتين المتساويتين على بعضهما طرفاً بطرف كان $ط ه = ل ه$

وهذا هو ما اردنا ببيانته
سواءً النظر من الخامسة — المحل الهندسي لمساقط بؤرة القطع المكافئ على مماساته المختلفة هو المستقيم المماس لهذا المنحنى في رأسه

ولبيان ذلك ينزل من نقطة ك نقطة م مثلاً شكل (٧٣) عمود مثل
م وعلى الدليل ويوصل خط ب ه فيكون عمودياً على المماس م ط بمقتضى
بند (١١٦) بحيث تكون نقطة م مسقطاً للعمود على المماس
فاذا وصل الآن مستقيم ا م شوهد ان هذا المستقيم واصل بين وسطى
ضلعى المثلث ه د ب فيكون حينئذ موازياً الى ضلعه الثالث ه د
وبناء عليه يكون عمودياً على المحور وحماساً للمحنى في نقطة رأسه بمقتضى
بند (١١) وبذلك يثبت المطلوب

تنبيه - يشاهد كما تقدم
أن دليل القطع الكافي والمماس
له في نقطة رأسه هما بالنسبة
له بمنزلة دائرة الاستدلال
والناثرة الاصلية بالنسبة لمخني
القطعة الناقص والزائد
سواء النظرية الجيوداستي
- في كل قطع مكافئ في نسبة مرتبة
أو قامة العمودية على المحور الى بعضها
كنسبة طولها عن الرأس

مثلاً إذا كان م م شكلاً (٧٤) وتر عمودياً على المحور تكون نقطة
وهو وسطاً لهذا الوتر بمقتضى بند (١١١) لكن حيث أن مثلث ط م ل
قائم الزاوية في م فيكون عمود م هـ وسطاً متناسلاً بين س هـ و وتره
ويجاءت حينئذ

$$m^2 = p^2 + x^2 + y^2$$

ومن حيث أن ω ليس مساوياً للبعد الثابت المرموز له بحرف ϵ وذلك
بمقتضى بند (١٤٠) وكذا من حيث أن بعد τ ω ضعف بعد ω
بمقتضى بند (١٤١) فنقول المتساوية المتقدمة إلى الصورة الآتية

$$m^2 = \frac{1}{2} \times 100$$

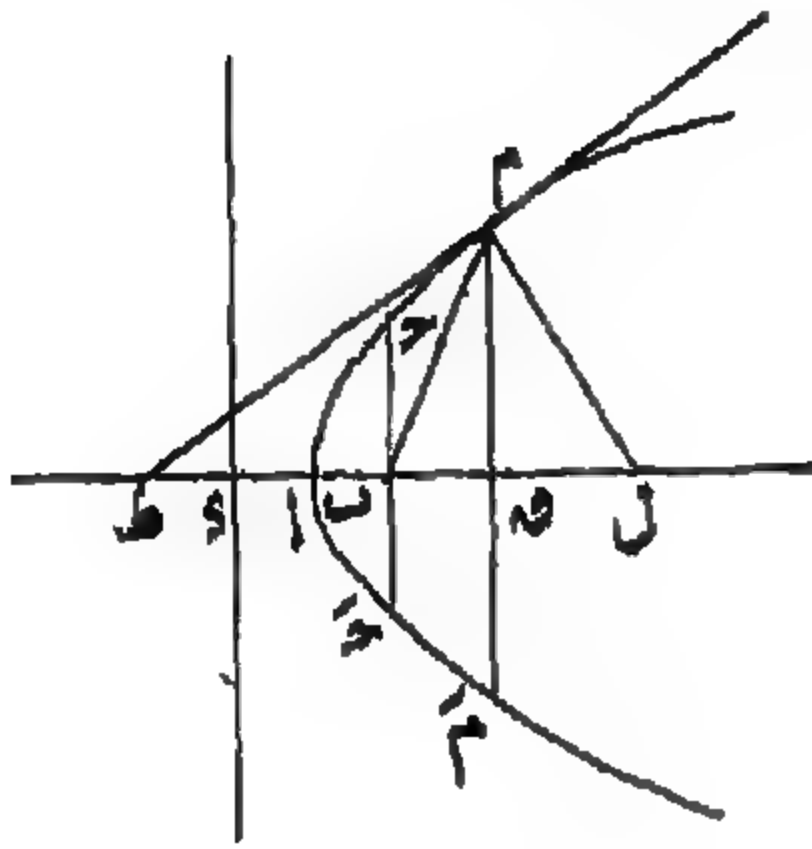
$$21 \times 2 = 42$$

وخلیہ کیوں

واضحاً

وأخيرا يكون

$$\frac{م م}{أه} = ع ٨ \quad \text{شكل ٧٤}$$



وحينئذ يعلم ان النسبة بين مربع
أى وتر وبين بعده عن الرأس
تكون ثابتة دائما وهذا هو ما اردنا بيانه
متجهت — الوتر المقام عموديا
على المحور من البؤرة يكون مساويا
الى ضعف البعد الثابت

مثلا اذا كان ح ح هو الوتر المذكور فمقتضى النظرية المتقدمة يكون

$$\frac{ح ح}{أه} = ع ٨$$

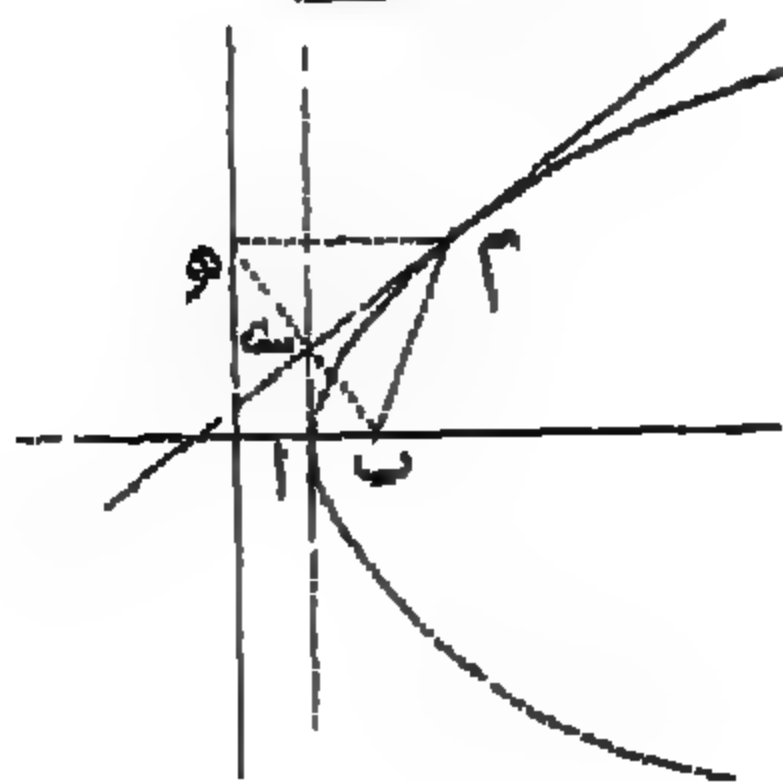
ولكن حيث ان $أه = \frac{١}{٢} ع$ فحينئذ يكون

$$ح ح = ع أو ح ح = ع$$

في رسم المستقيمتان المماسه

المسألة الأولى

شكل ٧٥



١٢٤ الد المطلوب مد مستقيم

مماس للقطع المكافئ من نقطة

مفروضة عليه

مثلا اذا كانت نقطة م

شكل (٧٥) هي النقطة المعلومة

فيوصل نصف قطرها البؤري

م ب ويترل منها عمود مثل م ه

على الدليل تم تنصف زاوية

هـ م ب يستقيم فيكون هو المطلوب
والأسهل ان يقام من رأس المنحنى وهي نقطة ا عمود على المحور ويوصل
خط ب هـ فيكون المماس المطلوب عبارة عن المستقيم الواصل من نقطة م
الى نقطة هـ التي هي نقطة تلاقي المستقيمين المتقدمين وهذه الكيفية
يستغنى الحال عن تقسيم الزاوية الى قسمين متساويين وذلك فضلا عن
كون المستقيم ا هـ يستعمل لرسم جميع المماسات التي يراد رسمها عند الإقضاء

المسألة الثانية

مسألة المطلوب مد مستقيم مماس للقطع المكافئ من نقطة خارجة عنه

لذلك يفرض ان المسألة المحلولة

وان نقطة ط هي النقطة المعلومة

وان مستقيم ط م شكل (٧٦)

هو المماس للمنحنى في نقطة مثل

نقطة م ثم ينزل العمود ب هـ

ويوصل خطا ط ب ر ط هـ

فيكونان متساويين

بحيث انه يمكن تعيين نقطة هـ

برسم قوس دائرة مركزه نقطة

ط ونصف قطر مساو الى ط ب ومتى تعينت نقطة هـ نصل منها

الى نقطة ب ولا يبقى سوى ان ينزل من نقطة ط عمود على مستقيم ب هـ

أو يوصل من نقطة ط الى نقطة تقاطع مستقيم ب هـ بالمماس للمنحنى

في نقطة رأسه اما نقطة التماس فانها تتعين بتقاطع المماس مع العمود

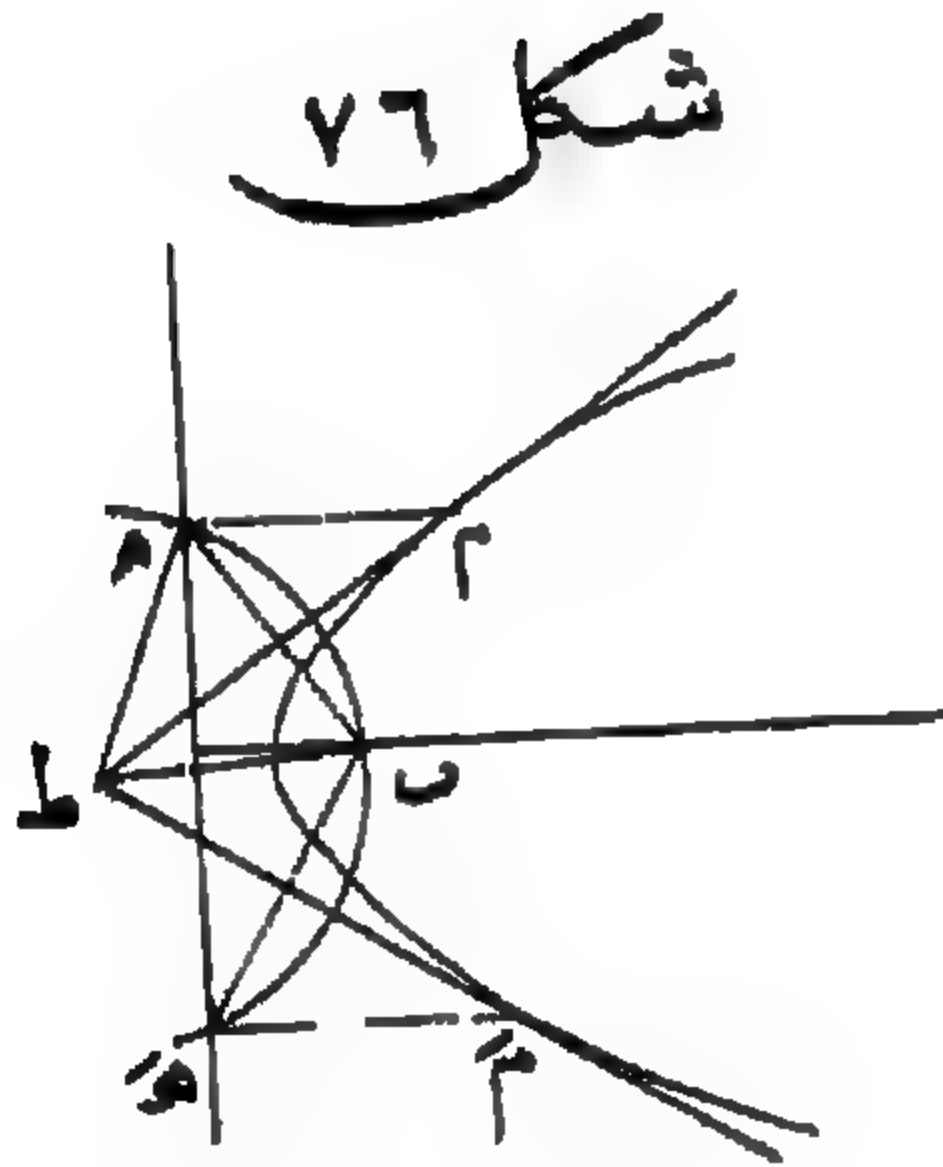
المقام من نقطة هـ على الدليل

وكذلك من حيث ان قوس الدائرة متقاطع مع الدليل في نقطة ثانية مثل

هـ فيوجد بناء على ذلك مماس ثان مثل ط م للمنحنى

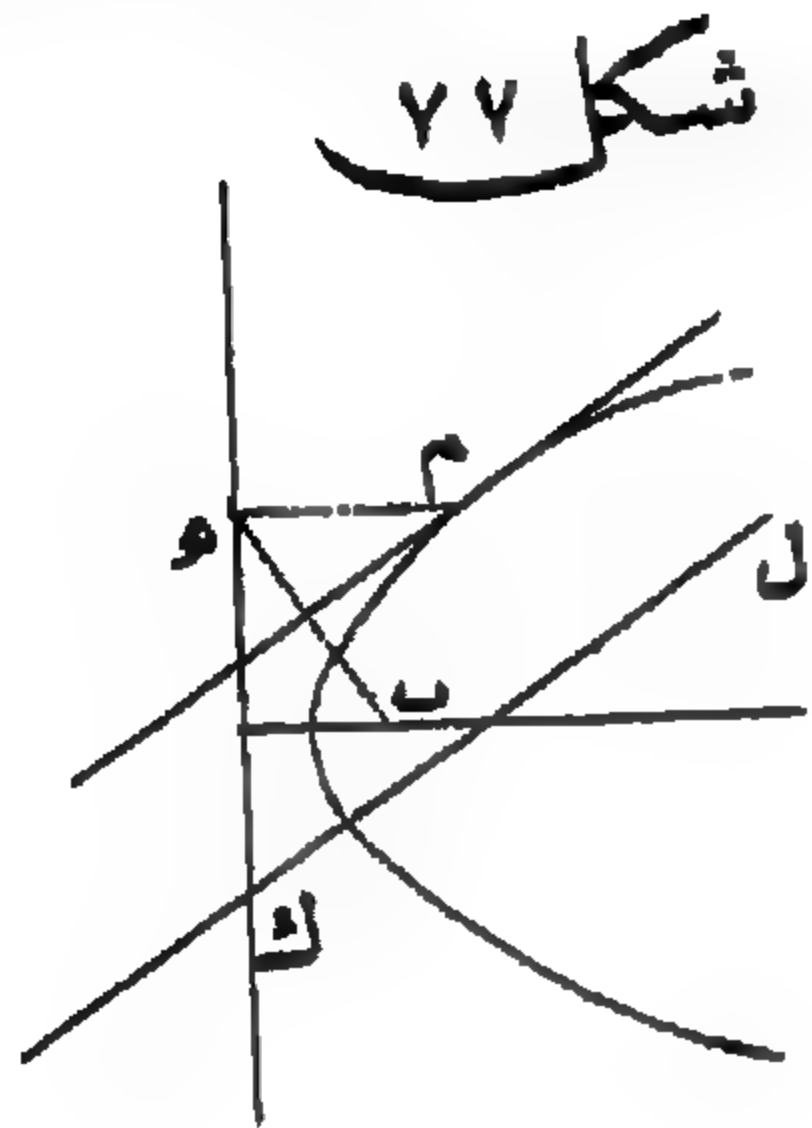
ولاجل امكان حل هذه المسألة يلزم ان يكون قوس الدائرة متقاطعا مع

الدليل اعني يلزم ان تكون نقطة ط من خارج المنحنى كما في بند (١١٥)



المسألة الثالثة

مسألة المطلوب رسم مستقيم مماس لقطع مكافئ وموازٍ لمستقيم معلوم
مثلاً ليكن خط $ك ل$ هو المستقيم المعلوم شكل (٧٧) فاذا أنزل من
البؤرة $ب$ عمود على المماس كان هذا المستقيم عمودياً أيضاً على $ك ل$
وبناء على ذلك يكون هذا العمود معين الوضع وتعلم أيضاً نقطة



هـ التي هي نقطة تلاقيه مع الدليل
وحيث يكون المماس المطلوب
هو العمود المقام على وسط مستقيم
 $ب هـ$ أما نقطة تماسه فتعين
كما تقدم بمد من نقطة هـ مستقيم
موازٍ إلى المحور

ومن البديهي أنه لا يكون لهذه المسألة
الاحلاواً ما دام المستقيم المعلوم

كذلك غير موازٍ إلى المحور
أما إذا كان موازياً إلى المحور فتكون المسألة غير ممكنة الحل لأن مستقيم
 $ب هـ$ يصير في هذه الحالة موازياً إلى الدليل وتصبح نقطة هـ على بعد غير
محدد

مسألة (تنبيه) من حيث أن الطرق الثلاثة المتقدمة لا تستلزم أن يكون
المحني مرسومًا من قبل فيمكن حينئذ استعمالها لضبط رسم المحني

مسألة (في رسم العموديات) ما صرح به في المقدمة بند (١٩)
(٢٠) و (٢١) هو كافٍ لهذا الخصوص ولذلك قد اقتصرنا

عليه هنا لكن لا بأس من ذكر حل المسألة الآتية حيث أنه سهل جداً
وهي المعلوم نقطة على محور القطع المكافئ والمطلوب منه مستقيم عمودياً على ذلك
المحني منها

مثلاً لنفرض أن نقطة $ل$ شكل (٧١) المتقدم هي النقطة المعلقة
فيؤخذ على المحور بالابتداء من نقطة $ل$ جهة رأس المحني بعد $ل هـ$

مساويا للبعد الثابت ويقام من نقطة ω عمود كالعمود $\omega\mu$ في تقاطع
مع المنحنى في نقطة μ تكون هي نقطة تقاطع العمودى المطلوب بالمنحنى
وحينئذ لا يبقى سوى ان يوصل المستقيم $\mu\omega$ فيكون هو العمودى
على المنحنى المار بنقطة ω

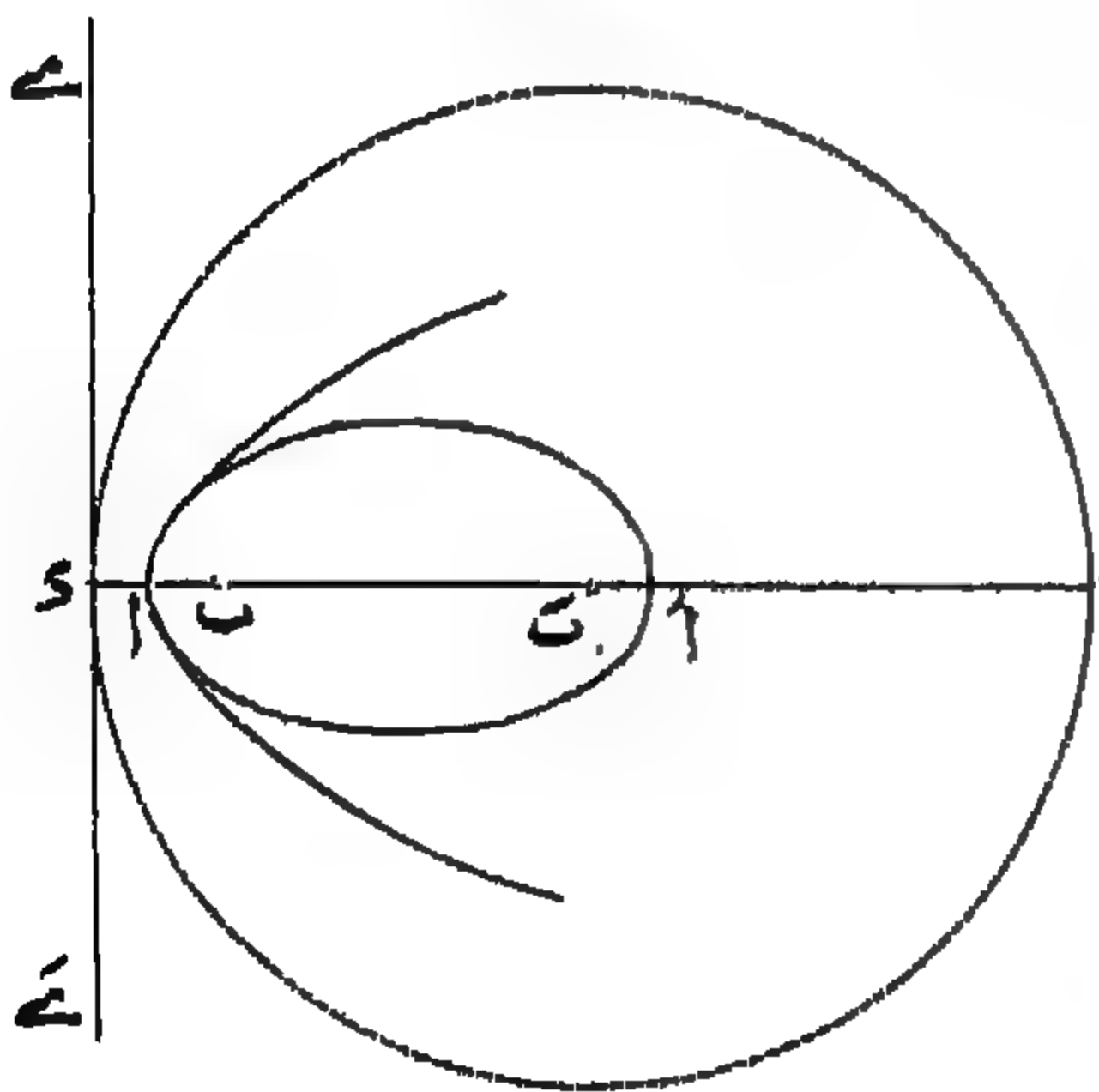
لكن من حيث ان العمود $\mu\omega$ يقابل القطع المكافئ في نقطة ثانية
فيجدت عمودى آخر مماثل للعمود الاول واخيرا حيث ان محور القطع المكافئ
هو احد عمودياته فيشاهد حينئذ انه يمكن مد ثلاث عموديات على ذلك
المنحنى من نقطة ω

أما اذا لم يكن المنحنى مرسومًا من قبل فلتعين نقطة μ والنقطة المماثلة
لها يرسم قوس دائرة مركزه البور ω ونصف قطره بعد $\omega\mu$

في اقطار القطع المكافئ

١٤٩ النظرية السابقة - القطع المكافئ يمكن اعتباره نهاية
لقطع ناقص بقيت احدى بورتيه والرأس المجاورة لها على حالها أما
بورتيه ورأسه الاخرين فقد بعدتا الى ما لا نهاية
ولنعتبر مثلاً قطعاً ناقصاً كالمرسوم في شكل (٧٨) ونفرض ان رأسه α والبور ω

شكل ٧٨



المجاورة لها بقيتا ثابتتين
أما رأسه الاخرى α وبورته
الثانية ω والمركز قد
بعدت الى ما لا نهاية فوجد
انه بمجرد ازدياد المحور $\alpha\omega$
يستطيل هذا المنحنى شيئاً
فشيئاً وتوّل دائرة استدلاله
المرسومة بجعل نقطة ω
مركزاً الى دائرة انحنائها
يميل الى الاستقامة شيئاً

فشيئاً لتتحد مع المماس لها في نقطة ω ففي نهاية الامر توّل هذه الدائرة

الى

الى مستقيم مثل م م عمودي على المحور ويصير حينئذ القطع
الناقص الذي هو المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن البوق ب وعن
دائرة الاستدلال كما هو مقرر ببند (٥٥) منحنيًا جميع نقطه متساوية
البعد عن البوق ب وعن مستقيم م م اعني قطعًا مكافئًا
ومثل ذلك يمكن ايضا بيان انه يمكن اعتبار القطع المكافئ ايضا
نهاية للقطع الزائد الذي بقيت احدي بويرتيه والراس المجاورة لها ثابتتين
وبعدت راسه الاخرى الى ما لا نهاية

وبناء على هذه النظرية يمكن استنتاج اخص خواص القطع المكافئ
من الخواص المماثلة لها في القطع الناقص الا انه لا ينبغي تطبيق هذه الطريقة
المستحقة على ما سبق بيانه من خواص القطع المكافئ اذ لا صعوبة في تطبيقها
عليها وانما نستعملها فيما سنشرع في بيانه من الخواص المستحقة لهذا المعنى
سند النظرية الثامنة - جميع اقطار القطع المكافئ تكون موازية
الى محوره

ولبيان ذلك يقال من المعلوم ان كل مستقيم مار بمركز القطع الناقص
هو محوره وان ذلك يبقى صحيحا مهما كان شكل القطع الناقص كما في
بند (٦٥) وحينئذ تبقى هذه الخاصية موجودة ايضا في حالة
اعتبار القطع الناقص النهائي اعني القطع المكافئ لكن لا يخفى انه متى
بعد مركز القطع الناقص الى ما لا نهاية صارت المستقيمت المارة بهذه
النقطة موازية الى المحور وهو المطلوب

ومن ذلك يشاهد انه لما كانت جميع اقطار القطع المكافئ متوازية فلا
يكون لهذا المنحنى اقطار مزدوجة الاتجاه مع بعضها مشني كما في القطع الناقص
سند لاجل استنباط بعض منافع من خواص اقطار القطع المكافئ
ينبغي اولا معرفة حل المسائل الآتية التي سنتصدها الان لانه كرها

المسألة الأولى

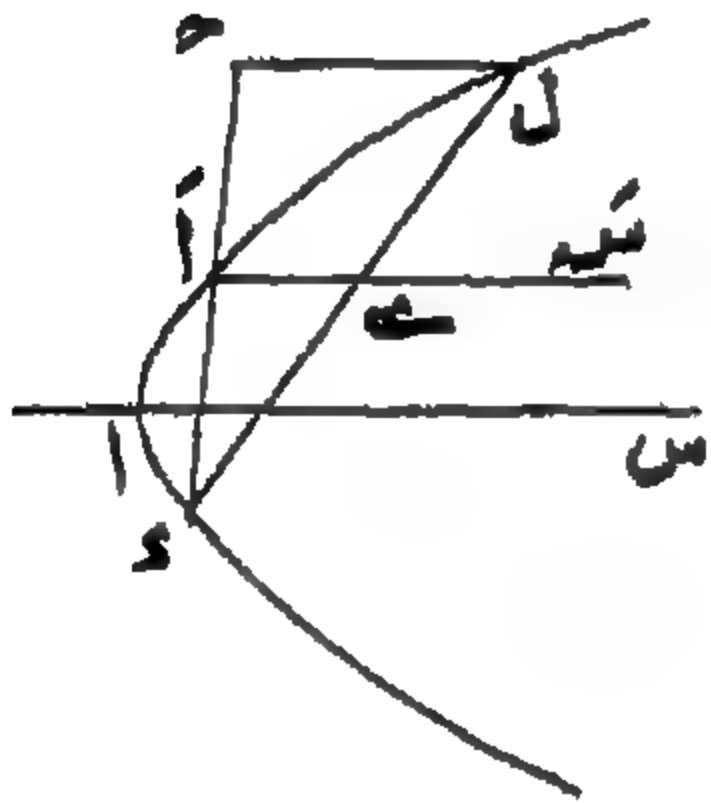
سند المطلوب تعيين القطر المزاوج للاتجاه معلوم
من المعلوم انه يكفي لحل هذه المسألة رسم وتر مواز للاتجاه المعلوم

ثم ينصف هذا الوتر بنقطة ويرسم منها مستقيم موازاً إلى المحور وفي حالة ما يكون القطع المكافئ غير مرسوم يلزم أولاً تعيين نهايتي هذا الوتر بواسطة الطريقة المتقدمة في بند (١١٢)

المسألة الثانية

١٣٢ المطلوب إيجاد الاتجاه المزاويع لقطر معلوم مثلاً إذا كان مستقيم AS هو القطر المعلوم شكل (٧٩) فيوصل من نقطة A إلى نقطة اختيارية من المنحنى كنقطة E وتعدا المستقيم الموصول على

شكل ٧٩



استقامته ويؤخذ عليه بعد AS مساوياً لـ AE ثم يرسم من نقطة C مستقيم موازاً إلى المحور فيقطع المنحنى في نقطة كنقطة L وإذا وصل خط CL كان منقسماً بمستقيم AS إلى قسمين متساويين وإذا كان CL هو الاتجاه المطلوب

١٣٣ كذلك حيث أن المستقيم المماس للقطع المكافئ يكون دائماً موازياً

إلى الأوتار المزدوجة مع القطر المار بنقطة التماس فينبغي أن يمكن بواسطة حل المسألتين المتقدمتين إيجاد المستقيم المماس لهذا المنحنى في نقطة مفروضة عليه أو الموازي لاتجاه معلوم إلا أنه لا ينبغي تفضيل هاتين الطريقتين عن الطريقتين اللتين سبقا في بند (١٤١) و (١٤٦) ومع ذلك فإنه لا يمكن الاستغناء عنهما بحالة ما يكون القطع المكافئ مرسوماً ولم يعلم بوتره ولا دليله

أما في حالة ما يكون اتجاه المحور مجهولاً أيضاً فينبغي أولاً الاستعانة على إيجاده بمعرفة المسألة اللاحقة

المسألة الثالثة

وحيثما يتقينا ايجاد البوة
ولاجل الوصول الى ذلك

يرسم المماس للمضني في نقطة أ
الذي يكون بالضرورة موازيا
الى وترى م ح ، كذلك
ثم نتذكر ان المثلث المتكون
من المحور والمماس ونصف
القطر البودي لنقطة التماس
يكون بمقتضى بند (١١٩)

منتساوی الساقین

وحيث يقع من قوس $\alpha\beta$ عموداً في تقاطع مع المحور في نقطة تكون هي
البقرة β ولتعيين نقطة من الدليل يؤخذ على هذا العمود البعد $\beta\gamma$ مساوياً
إلى البعد $\alpha\beta$ فإذا انزل من نقطة γ عموداً على المحور كان هو الدليل المطلوب
مثلاً بناءً على ما تقرره في بند (١٢) من المقدمة يعلم أنه إذا صار
القاطعان AB في α هما $\alpha\beta$ للمخني فإنها لا يزالان متقاطعين على
القطر AO المزدوج الاتجاه مع الوتر AC
مثلاً إذا رسم المستقيم المماس للمخني في نقطة α كان بالبداهة موازياً
إلى الوترين AC و AD ومنقسماً بقطر AO إلى قسمين متساويين
بحيث يكون

فأ = أ' ٧

وحيث ان هذه المساوية تبقى موجودة وانما هما كانا العديدين الوترين
ع ح ، كذا فتكون موجودة ايضا عند النهاية وحينئذ يمكن ان يقال

ط ك ومارب نقطة و وسط بعد ط ر
 فينتج من ذلك ان نقطة ه تكون هي وسط بعد ر ك
 وحينئذ يكون

$$[3] \quad \begin{aligned} 2r &= m + s \\ 2h &= h + k \end{aligned}$$

وبناء عليه يحدث

$$h + m = s + h + k$$

أو

$$h + m + k + s - (k + s + h) = m - k - h$$

واخيرا يكون

$$h + m = k$$

ومن جهة اخرى حيث ان المستقيم م ح الموازي الى ط ك
 الذي هو قاعدته مثلث م ط ك ماربوسط ط م
 فبناء على ذلك تكون نقطة ح وسطا للبعد م ك وحينئذ
 يكون

$$m + k = m + h$$

وتبعاً لذلك يكون

$$[4] \quad h + m = m + h$$

وايضا من حيث ان

$$2h = s + r - s - h$$

فيحدث بناء على متساويتي [3] و [4] ان

$$h = s + r - m - h = s + h$$

وعلى مقتضى ذلك يحدث التناسب الآتي

$$h : h :: s : s + h :: m : m + h$$

وحيث انه بين تناسبي [1] و [4] نسبة مشتركة
 فيتركب من النسبتين الاخيرتين تناسب بحيث يكون

$$2 : ح : ا : : ا : ب : ب م$$

وهو المطلوب

وبمثل ذلك يبرهن على ان نسبة

$$12 : ا : ح : : ح : ب : ب ط$$

وكذلك يبرهن على ان نسبة

$$م : ا : ا : ب : : ب : ح : ح ط$$

س ٣٨ الد نتيجته اذا وجدت جملة مستقيمت
مماسية لقطع مكافئ واحد فاقول ان كل اثنين اختياريين من
هذه المماسات يكونان منقسمين بالمماسات الأخرى الى اجزاء متناسبة
مثلا اذا فرض

ان المستقيمت

اط ر ح ه ر م ك

ر ل م ر الخ مماسة

لقطع مكافئ كما في

شكل (٨٤) واعتبرنا

منها الثلاثة مماسات

اط ر ط و ر ح ه

فيحدث بناء على ما

تقرر في النظرية السابقة

ان نسبة

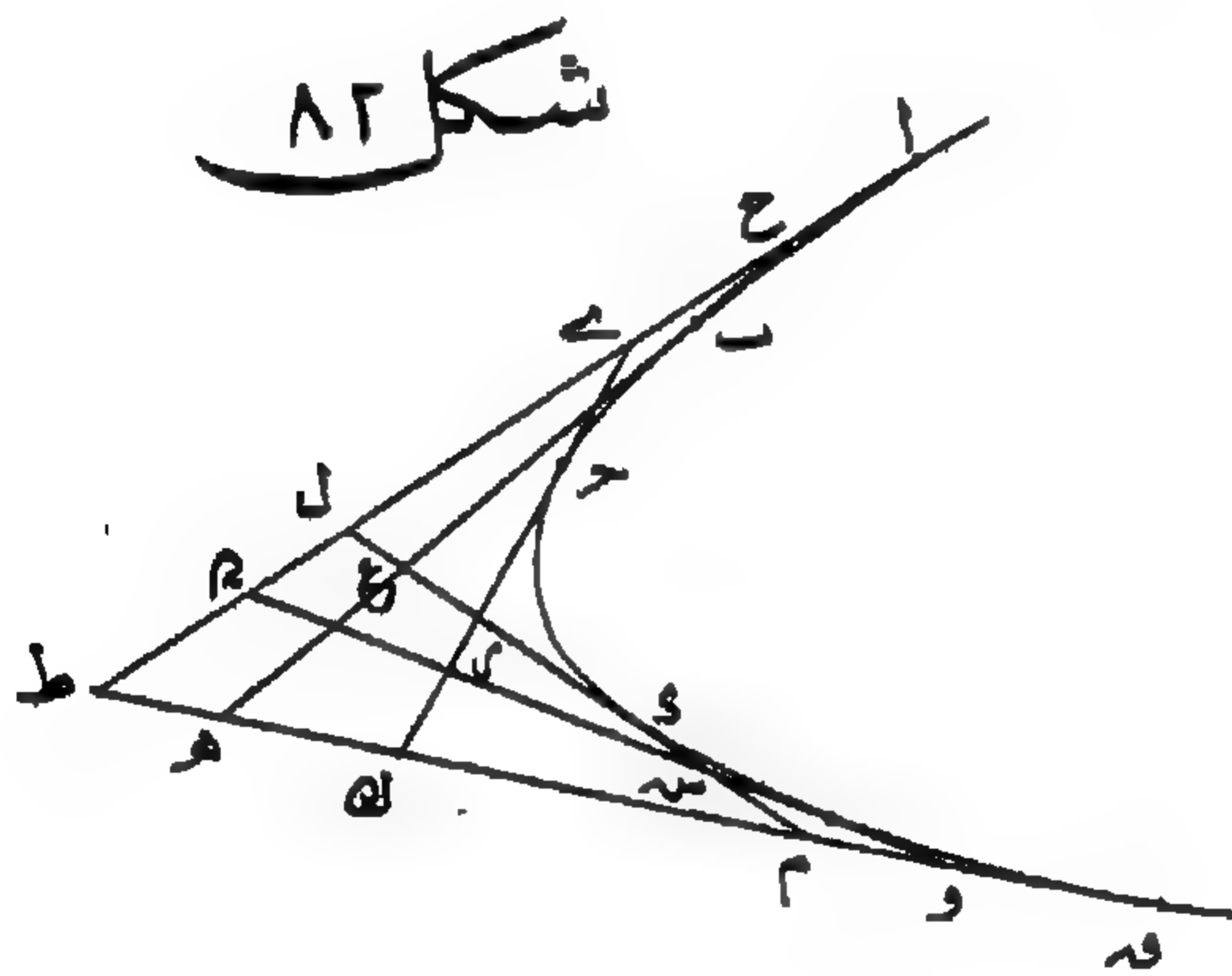
$$ا : ح : ح ط : : ط : ه : ه م$$

وبتغيير الوسطين ببعضها وملاحظة ان نسبة مجموع المقدمين
الى مجموع التالين في التناسبات الجديدة هي كنسبة أى مقدم الى تاليه
يحدث

$$ا : ح : ط : ه : : ح ط : ه م : : ا ط : ط م$$

فاذا اعتبرنا المماس ب م ك يحدث أيضا أن

ك



ا ح ط ك : : ط : ك ه : : ا ط : ط ه

وباعتبار المماس لم يحدث بالمثل أن

ا ل : ط م : : ل ط : م ه : : ا ط : ط ه

واخيرا باعتبار المماس ج و يكون

ا ج : ط و : : ج ط : و ه : : ا ط : ط ه

وحيث انه يوجد بين جميع هذه التناسبات نسبة مشتركة فتكون جميع
النسب الباقية متساوية ويحدث حينئذ هذا التناسب الآتي

ا ح : ط ه : : ا ح : ط م : : ا ج : ط و : : ا ط : ط ه

فاذا طرح في هذا التناسب من حدى كل نسبة حدى النسبة السابقة لها
حدثت عدة نسب جديدة متساوية بحيث يكون

ا ح : ط ه : : ح : ك ه : : ل م : ج ل : : م و : ج ط : : و ه

وبذلك يثبت المطلوب

فاذا اعتبرنا الآن مماسين آخرين كما سى ا ط ر لم مثلاً حدث أيضاً

ا ح : ل ع : : ح : ع ر : : ل م : ر د : : م و : د ط : : م و

وهلم جئنا

ويشاهد من ذلك انه اذا كان احد المماسات منقسماً الى اقسام
متساوية كانت المماسات الباقية كذلك

سأخذ طريقة رسم قوس من قطع مكافئ معلوم من بعد معرفة مماسين
من مماساته

يؤخذ من النتيجة المتقدمة طريقة بسيطة لرسم قوس من القطع المكافئ
اذا علم مماسان من مماساته ونقطتا تماسهما به فلنفرض مثلاً ان ا ط
ر ط ه ه شكل (٨٣) هما المماسان العلويان وان نقطتى ا ر ه هما
نقطتا تماسهما فيقسم كل واحد من هذين المستقيمين الى اقسام متساوية
عدد هـ كعدد تقاسيم المستقيم الثانى ثم توصل المستقيمتين هـ ك
ل م ر و ه ر و الخ فتكون بمقتضى ما تقدم مما سبقت للقطع
المكافئ المطلوب بحيث لو كان عدد هذه المماسات كثيراً جداً
مكننا لرسم المنحنى

الى المحور فانه يقسم الوتر م م الى قسمين متساويين بمقتضى بند (١٤٥)
وبناء على ذلك يكون العمود ح م المساوي لارتفاع المثلث مساويا ايضا
لضعف مجموع قاعدتي شبه المنحرف لكن حيث ان مساحة مثلث

$$ه ب ه = ه ه \times ح م$$

$$\text{شبه منحرف ط م م ط} = \text{ط ط} \times ح م$$

فحينئذ تكون نسبة شبه منحرف ط م م ط : مثلث ه ب ه :: ط ط : ه ه
لكن من المعلوم بمقتضى بند (١٤٢) ان

$$\text{ط} = \text{ا ه}$$

$$\text{ط} = \text{ا ه}$$

ومنها يكون

$$\text{ط ط} = ه ه$$

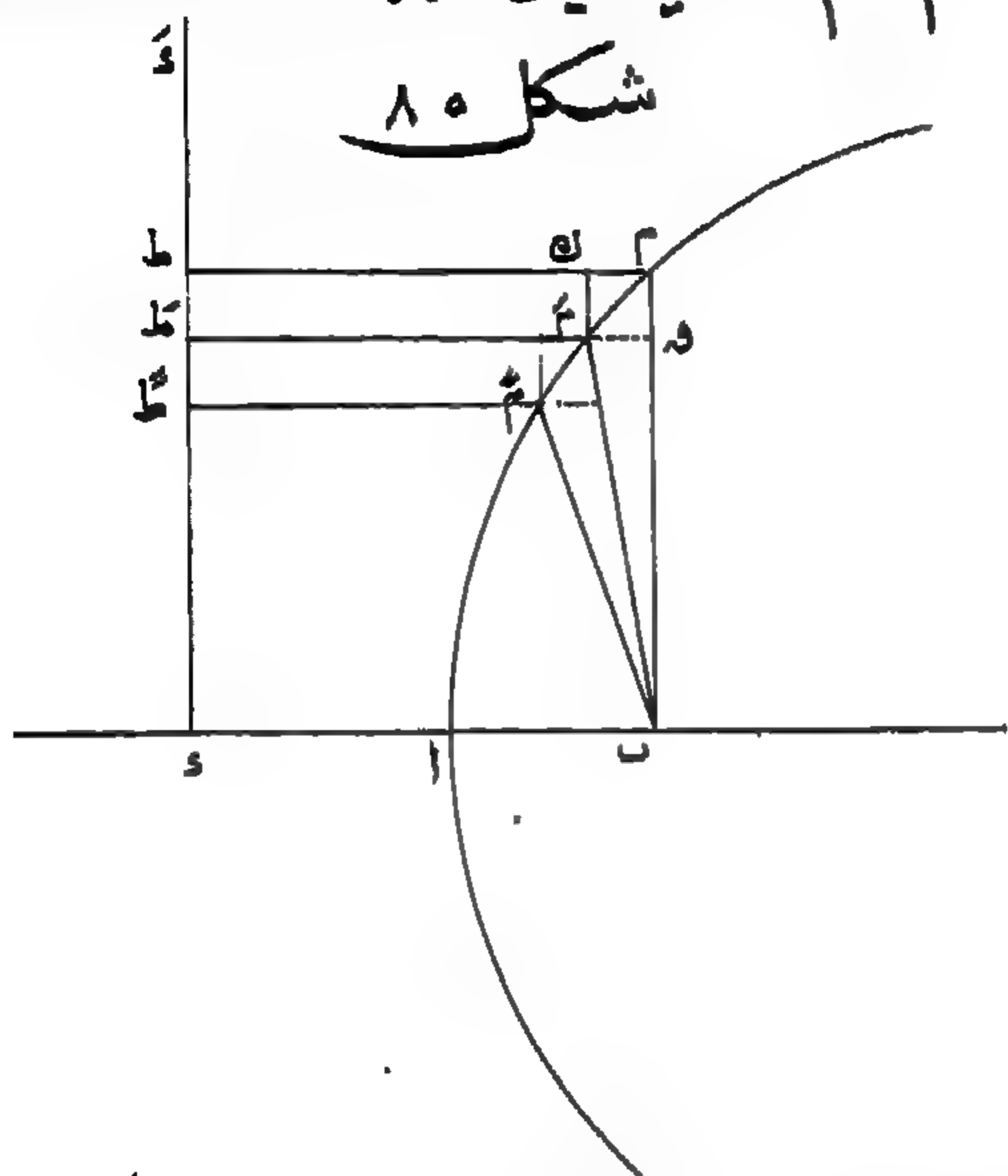
وبناء على ذلك يكون

$$\text{شبه منحرف ط م م ط} = \text{ا ه} \times \text{مثلث ه ب ه}$$

وبمثل ذلك يبرهن على ان شبه المنحرف المجاور له مساو لضعف المثلث المناظر
له وهلم جمل وحينئذ يكون مجموع الاشياء منحرف مساويا لضعف
مجموع المثلثات فاذا نرودنا عدد اضلاع الخط المنكسر زيادة لانهاية
كان نهاية مجموع الاشياء منحرف عبارة عن سطح القطعة م ا ط ونهاية
مجموع المثلثات عبارة عن مساحة القطعة المثلثية ه م ا
وحينئذ تكون مساحة القطعة الاولى ضعف مساحة القطعة
الثانية اعني انها تكون مساوية لثلثي المثلث ه م ط او المستطيل
اع م ط. المكافئ لهذا المثلث

فاذا مدا الاحداث م ط على استقامته حتى يتلاقى مع المضي في
نقطة م المائلة لنقطة م تحصلت بالضرورة قطعة مكافئة
ضعف الاولى تكون بالمثل مساوية لثلثي المستطيل ع م م ح
وتنتج حينئذ النظرية الالامية

النظرية الحادية عشر - مساحة القطعة المكافية المحصورة
بين رأس المنحنى ووتر عمودي على المحور تساوي لثلثي مساحة المستطيل



ساد مساحه القطاع
 المكافى ا ب م المحصور
 بين نصفي القطرين البؤريين
 ب ا , ب م شكل (٨٥)
 المنطبق احدهما وهو ا
 على المحور ب ا و تساوى
 ثلث مساحة شبه المنحرف
 م ب د ط المخصص بين
 المحور ب د والدليل د ط
 والافقى م ط المار بنهاية

نصف القطر البوري م ب وبين نصف القطر المذكور
والبرهنة على ذلك يقال اذا أخذت نقطة مثل م قريبة جداً
من نقطة م ووصل منها الى البورة ب بنصف القطر البوري م ب
ثم انزل منها المستقيم م ط عمودياً على الدليل ع د فحدث مثلث
م م ب المنحني الضلع م م والشكل الرباعي م م ط د المنحني الضلع
م م أيضا فاذا تصورنا ان نقطة م أخذت في الاقتراب من نقطة
م شيئا فشيئا حتى وصلت حدا النهاية في القرب منها فعند ذلك يؤل
المثلث م م ب الذي كان منحني الضلع م م الى مثلث آخر مستقيم
الاضلاع الثلاثة وصغير جدا وكذا يؤل الشكل الرباعي م م م
ط الى شكل متوازي الاضلاع ومستقيما بحيث تكون مساحة
مثلث م م ب عند النهاية مساوية لنصف مساحة متوازي
الاضلاع المذكور لانها يكونان متحدتين في القاعدة والارتفاع

وذلك

شکل ۱۶

17

3 3

نائب الرئيس

الأجزاء الخمسة

الإصلاح في هذا

$$1.52 = 2 \frac{1}{2} \text{ m}$$

10

ثمة جدل في نقطة واحدة

11-12-13-14-15-16-17-18-19-20-21-22-23-24-25-26-27-28-29-30-31-32-33-34-35-36-37-38-39-40-41-42-43-44-45-46-47-48-49-50-51-52-53-54-55-56-57-58-59-60-61-62-63-64-65-66-67-68-69-70-71-72-73-74-75-76-77-78-79-80-81-82-83-84-85-86-87-88-89-90-91-92-93-94-95-96-97-98-99-100-101-102-103-104-105-106-107-108-109-110-111-112-113-114-115-116-117-118-119-120-121-122-123-124-125-126-127-128-129-130-131-132-133-134-135-136-137-138-139-140-141-142-143-144-145-146-147-148-149-150-151-152-153-154-155-156-157-158-159-160-161-162-163-164-165-166-167-168-169-170-171-172-173-174-175-176-177-178-179-180-181-182-183-184-185-186-187-188-189-190-191-192-193-194-195-196-197-198-199-200-201-202-203-204-205-206-207-208-209-210-211-212-213-214-215-216-217-218-219-220-221-222-223-224-225-226-227-228-229-230-231-232-233-234-235-236-237-238-239-240-241-242-243-244-245-246-247-248-249-250-251-252-253-254-255-256-257-258-259-260-261-262-263-264-265-266-267-268-269-270-271-272-273-274-275-276-277-278-279-280-281-282-283-284-285-286-287-288-289-290-291-292-293-294-295-296-297-298-299-300-301-302-303-304-305-306-307-308-309-310-311-312-313-314-315-316-317-318-319-320-321-322-323-324-325-326-327-328-329-330-331-332-333-334-335-336-337-338-339-340-341-342-343-344-345-346-347-348-349-350-351-352-353-354-355-356-357-358-359-360-361-362-363-364-365-366-367-368-369-370-371-372-373-374-375-376-377-378-379-380-381-382-383-384-385-386-387-388-389-390-391-392-393-394-395-396-397-398-399-400-401-402-403-404-405-406-407-408-409-410-411-412-413-414-415-416-417-418-419-420-421-422-423-424-425-426-427-428-429-430-431-432-433-434-435-436-437-438-439-440-441-442-443-444-445-446-447-448-449-450-451-452-453-454-455-456-457-458-459-460-461-462-463-464-465-466-467-468-469-470-471-472-473-474-475-476-477-478-479-480-481-482-483-484-485-486-487-488-489-490-491-492-493-494-495-496-497-498-499-500-501-502-503-504-505-506-507-508-509-510-511-512-513-514-515-516-517-518-519-520-521-522-523-524-525-526-527-528-529-530-531-532-533-534-535-536-537-538-539-540-541-542-543-544-545-546-547-548-549-550-551-552-553-554-555-556-557-558-559-560-561-562-563-564-565-566-567-568-569-570-571-572-573-574-575-576-577-578-579-580-581-582-583-584-585-586-587-588-589-590-591-592-593-594-595-596-597-598-599-600-601-602-603-604-605-606-607-608-609-610-611-612-613-614-615-616-617-618-619-620-621-622-623-624-625-626-627-628-629-630-631-632-633-634-635-636-637-638-639-640-641-642-643-644-645-646-647-648-649-650-651-652-653-654-655-656-657-658-659-660-661-662-663-664-665-666-667-668-669-670-671-672-673-674-675-676-677-678-679-680-681-682-683-684-685-686-687-688-689-690-691-692-693-694-695-696-697-698-699-700-701-702-703-704-705-706-707-708-709-710-711-712-713-714-715-716-717-718-719-720-721-722-723-724-725-726-727-728-729-730-731-732-733-734-735-736-737-738-739-740-741-742-743-744-745-746-747-748-749-750-751-752-753-754-755-756-757-758-759-760-761-762-763-764-765-766-767-768-769-770-771-772-773-774-775-776-777-778-779-780-781-782-783-784-785-786-787-788-789-790-791-792-793-794-795-796-797-798-799-800-801-802-803-804-805-806-807-808-809-810-811-812-813-814-815-816-817-818-819-820-821-822-823-824-825-826-827-828-829-830-831-832-833-834-835-836-837-838-839-840-841-842-843-844-845-846-847-848-849-850-851-852-853-854-855-856-857-858-859-860-861-862-863-864-865-866-867-868-869-870-871-872-873-874-875-876-877-878-879-880-881-882-883-884-885-886-887-888-889-890-891-892-893-894-895-896-897-898-899-900-901-902-903-904-905-906-907-908-909-910-911-912-913-914-915-916-917-918-919-920-921-922-923-924-925-926-927-928-929-930-931-932-933-934-935-936-937-938-939-940-941-942-943-944-945-946-947-948-949-950-951-952-953-954-955-956-957-958-959-960-961-962-963-964-965-966-967-968-969-970-971-972-973-974-975-976-977-978-979-980-981-982-983-984-985-986-987-988-989-990-991-992-993-994-995-996-997-998-999-1000-1001-1002-1003-1004-1005-1006-1007-1008-1009-1010-1011-1012-1013-1014-1015-1016-1017-1018-1019-1020-1021-1022-1023-1024-1025-1026-1027-1028-1029-1030-1031-1032-1033-1034-1035-1036-1037-1038-1039-1040-1041-1042-1043-1044-10

الحادي عشر

الحرب في نقطة ك

المستقر خط مائل

۱۶۱۰

دعوت لکھ وایا ادا

سقیعہ عجمی مول

3766

1111

سأولمثلت حرك ط

حرك قطره

وَمِثْلَكَ حَذَرٌ

الحمد لله رب العالمين

على بعضهما وصرح بمجموعهما

1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 2679, 2680, 26

مثلاً ح ك ح كان الباقي هو متوازي الاضلاع ع ح ح ح
واذا جمع مثلاً ح ح س ح ك ع على بعضهما وطرح المجموع من مثلاً
ح ك ط كان الباقي متوازي الاضلاع س ط ع ح
وجينث فيكون متوازي الاضلاع المذكور مساوياً الى متوازي الاضلاع
ع ح ح ح

لیکن حیث ان بعد ب ک = ب ح فیکون لے = ل ح و سبب
 عینئذ ان یکون متوازن علی الاضلاع
 ہل لے ط = ہ ل ح س

اویکیون

ہول حوس = ۱۲ س طے حو

وعلیه فیکون متوانری الاضلاع

ع ح ح ح ح

فإذا تصورنا أن نقطة ح آخذة في الاقتراب من نقطة ح
شيئا فشيئا فلا يزال الاثر يباط المتقدم موجودا حتى إذا بلغت نقطة
ح نهاية قمرها من نقطة ح آل متوازي الاضلاع ع ح ح ح
في نهاية الامر إلى النجاء ح ح ح من القطعة المكافئة التي نحن صددنا
وأما متوازي الاضلاع ه ل ح س فانه يؤل إلى القطعة الخارجة
ح ه ل ح وعليه فيكون

حَوْحَح = حَوْحَلْه

فاذا اخذت عدة نقط مثل ح ح ر ز انحو على القوس
ح ب واجرى عليها العمل المتقدم انقسمت القطعة المكافئة ح ح م ح
الى جملتها جزا كل واحد منها يساوى لضعف الجزء المناظر له من اجزاء القطعة
الخارجية ح ح ب ه بحيث لو جمعت الاجز الاولى الى بعضها والثانية
على بعضها لثبت ان القطعة المكافئة

ح ح ح = ح ح ح

وعليه فتكون مساحة القطعة $ح د ح$ تساوي ثلثي متوازي
الأضلاع $ح د ح$ وهو المطلوب الأول

ومثل ذلك يبرهن على أن مساحة القطعة ح ب ا د ح تساوي مثلث
 مساحة متوازي الاضلاع ح ب و د
 وحينئذ إذا جمعت القطعتان المكافئتان على بعضهما كان مجموعهما
 وهو القطعة الكلية الاصلية ح د ب د مساوياً للمساحة
 لثلثي مساحة متوازي الاضلاع الكلي ح د و د وهو المطلوب
 (تنبيه) من حيث انه اذا انزل العمود ب د على ضلع ح د كان هو
 ارتفاع متوازي الاضلاع ح د و د فاذا رسم مستطيل قاعدته ح د
 وارتفاعه ب د كان مكافئاً لمتوازي الاضلاع ح د و د واذا
 فمكن ان يقال

ان مساحة القطعة المكافيه ح ب د ح تساوي لثلثي مساحة
 المستطيل الذي قاعدته هو وترها ح د وارتفاعه البعد الحقيقي لهذا
 الوتر عن نقطة التماس ب المقدر بالبعد ب د

في مجسم القطع المكافئ

مثال اذا ادير القطع المكافئ حول محور د و فانه يرسم
 جسماً متحركاً يسمى بالمجسم المكافئ يمكن تعيين حجمه بسهولة
 ولذلك نرجع الى العمليات التي اجريت في مثال ونقارن حجم
 الجسم الحادث من دوران مثلث ه ب د شكل (٨٤) بحجم الجسم
 الحادث من دوران المستطيل الذي قاعدته هي ح د وارتفاعه
 ط ط فيجد ان حجم الجسم الاول منها مساوياً الى

$$\frac{1}{2} \times \text{ح د} \times \text{ه ب}$$

وحجم الجسم الثاني مساوياً الى

$$\text{ط} \times \text{ح د} \times \text{ط}$$

مع ملاحظة أن حرف ط المعلق من النسبة التقريبية أما حرف ط العادي فهو
 المعلوم بالشكل وحينئذ فيكون حجم الاول ثلث حجم الجسم الثاني ثم يبرهن
 بمثل ذلك على أجامر الاجسام المماثلة لهذين الجسمين والمقابلة لجميع
 اضلاع الخط المنكسر فيكون بناء على ذلك مجموع الاسطوانات

مساوياً

مساوي الثلاثة أمثال مجموع الاجسام الخادثة من دوران المثلثات
 لكن من المعلوم أن نهاية مجموع الاسطوانات عبارة عن قطعة الجسم المكافئ
 ونهاية مجموع الاجسام الخادثة من دوران المثلثات عبارة عن الجسم الخادث من
 دوران الشكل هـ ا وحينئذ فيكون مجموع الاول ثلاثة أمثال مجموع الثالث
 وتكون قطعة الجسم المكافئ مساوية لثلاث ارباع المحروط هـ م هـ م لكن من حيث
 أن حجم هذا المحروط هو

$$\frac{1}{3} \times 5 \times 5 \times 5 = \frac{1}{3} \times 5 \times 5 \times 5$$

فحينئذ يكون حجم قطعة الجسم المكافئ مساويا الى

$$\frac{1}{3} \times 5 \times 5 \times 5 = \frac{1}{3} \times 5 \times 5 \times 5$$

وناء عليه تحدث النظرية الآتية

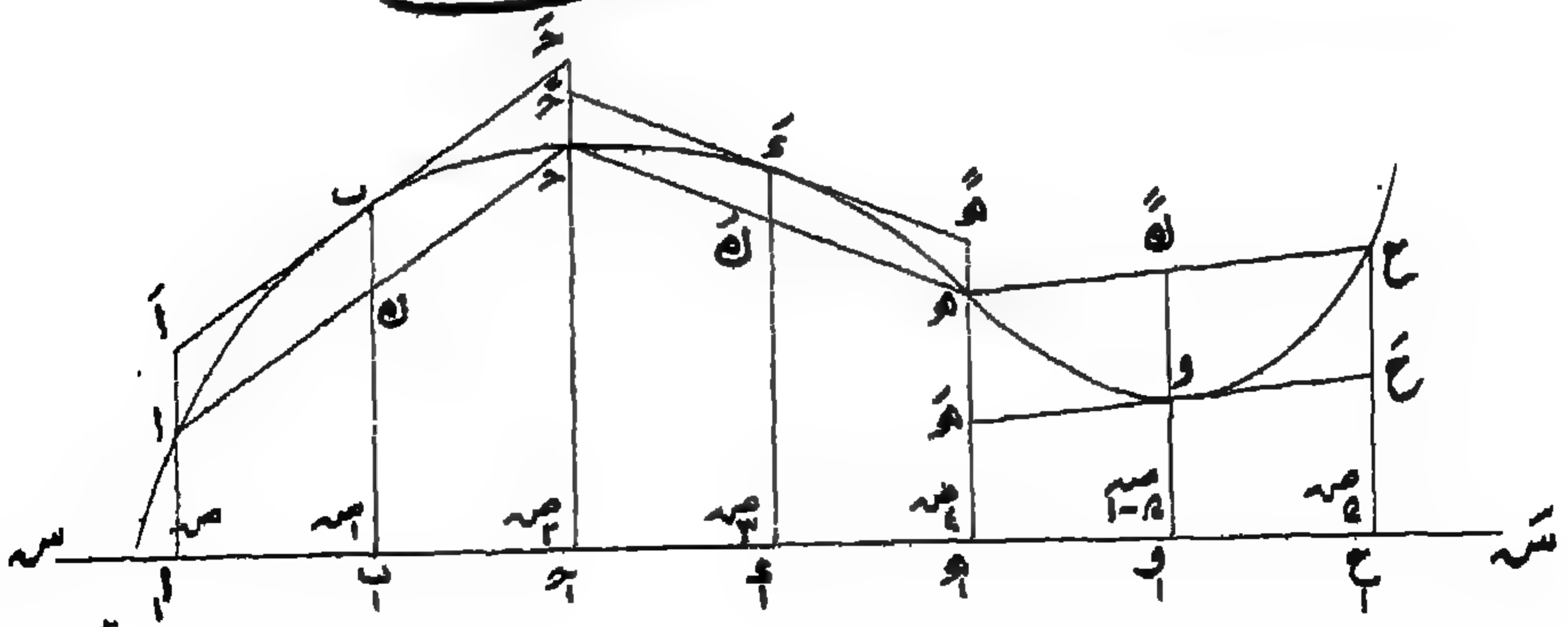
النظرية الثانية عشرة - حجم قطعة الجسم المكافئ المحصورة بين الرأس وبين مستوي
 عمودي على المحور يساوي نصف حجم الاسطوانة التي قاعدتها وارتفاعها عت
 قاعدت وارتفاع هذه القطعة

ولاجل تعيين حجم قطعة من هذا الجسم محصورة بين مستويين عموديين على
 المحور يعتبر حجم هذه القطعة كالفرق بين قطعتين محسوبتين من الرأس

قانون ثوما اسميسون

سلك قد أوعدنا في آخر بند (٥٠) بان سنذكر طريقة اخذ مساحة
 الاشكال المخنثية بواسطة قانون المسيو ثوما اسميسون بعد الكلام على القطع المكافئ
 لانها سينية على احدى خواصه وحيث قد آن الاوان لذكر هذه الطريقة فلندكرها
 هنا وفاء بما وعدنا به فنقول

شكل ١٧

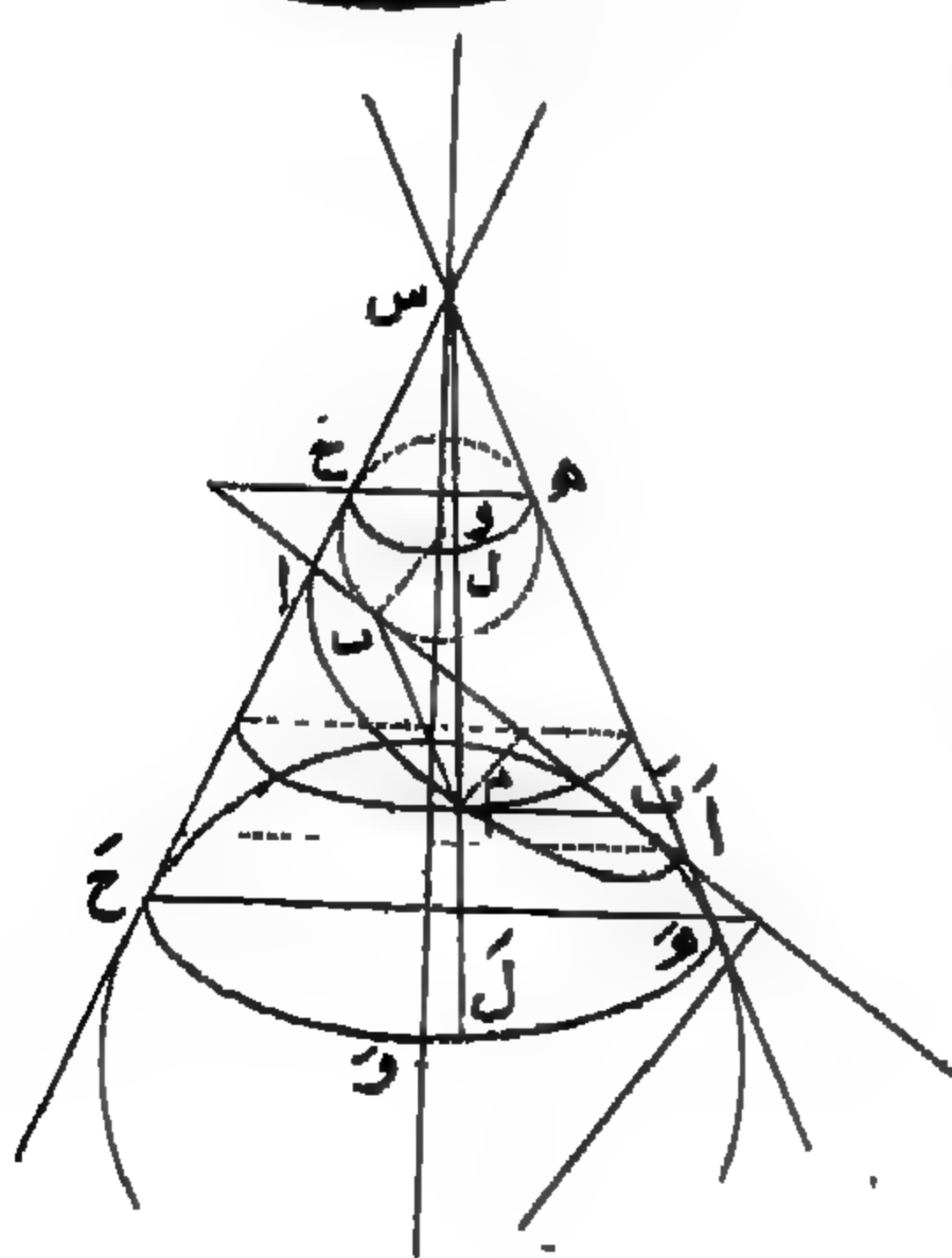


وفي الواقع لأن كلا من هذه الثلاثه منحنيات ناشئ عن قطع المخروط القائم الذي قاعدته دائرة بمستوى واختلافها ناتج فقط من اختلاف وضع ذلك المستوى القاطع الذي هو بمنزلة ابوها بالنسبة لوضع المخروط المقطوع الذي هو بمنزلة أمها فهي على ذلك اخوة ابوها المستوي وأما المخروط ولذا سميت بالقطاعات المخروطية ولنبين لك حقيقة ذلك فنقول —

سأند نظرية — اذا قطع المخروط القائم الذي قاعدته دائرة بمستوى كان خط تقاطعها إما قطعاً ناقصاً وإما قطعاً زائداً وإما قطعاً ممكافياً وذلك بحسب وضع المستوى القاطع بالنسبة لوضع المخروط فإن كان المستوى قاطعاً لجميع رؤوس المخروط في جهة واحدة من رأسه كان خط التقاطع قطعاً ناقصاً وإن كان قاطعاً لجميعها أيضاً لكنه قاطع لبعضها في إحدى الطيتين والبعض الآخر في الطية الثانية أعني في جهتين متضادتين من رأس المخروط كان خط التقاطع قطعاً زائداً وإما ان كان المستوى القاطع موازياً لأحد رؤوس المخروط وقاطعاً لباقي الرؤوس كان خط التقاطع قطعاً ممكافياً ومن هنا يعلم ان لهذه النظرية البديهة ثلاث حالات

سأند الحالة الاولى لنفرض أن المستوى القاطع قاطع لجميع رؤوس المخروط في جهة واحدة من رأسه مثلاً يكن س و و شكل (٨٨) هو مجبور المخروط ونفرض أن س أو س أ هما خطا تقاطعه بمستوى الشكل وان أ أ هو خط تقاطع المستوى القاطع بمستوى الشكل

شكل ٨٨



الذى فرضناه عموديا على ذلك المستوى القاطع
 ثم نرسم الدائرتين هـ ح ، هـ ح الماسيتين لاضلاع المثلث
 ا س آ ، ولا متداخلتا من الداخل والخارج وتتصوردورات
 جميع اجزاء الشكل [ما عدا خط ا آ] دورة كاملة حول المحور
 س و فستقيم س ا بولد سطح المخروط المعلوم ودائرتنا
 هـ ب ح ، هـ ح ترسمان كرتين مماسيتين لهذا المخروط في دائرتين
 صغيرتين مثل هـ ح ، هـ ح ومماسيتين ايضا للمستوى القاطع
 ا آ في نقطتين مثل ب ، ب
 اذا تقر هذا يقال اذا فرضنا ان خط تقاطع المستوى ا آ بالمخروط
 هو منحني كالمخني ا م آ واخذت عليه نقطة اختيارية مثل م
 ثم وصل منها الى رأس المخروط س بمستقيم م س ومنها الى نقطتي
 ب ، ب بمستقيمي م ب ، م ب لكان المستقيمان م ل ، م
 م ب متساويين بما انهما مماسيتان لكررة واحدة وهى الكرة و
 وخارجان من نقطة واحدة وهى م وبمثل ذلك يكون المستقيمان
 م ل ، م ب المماسان للكرة و متساويين ايضا وحينئذ
 يكون

$$م ب + م ب = م ل + م ل$$

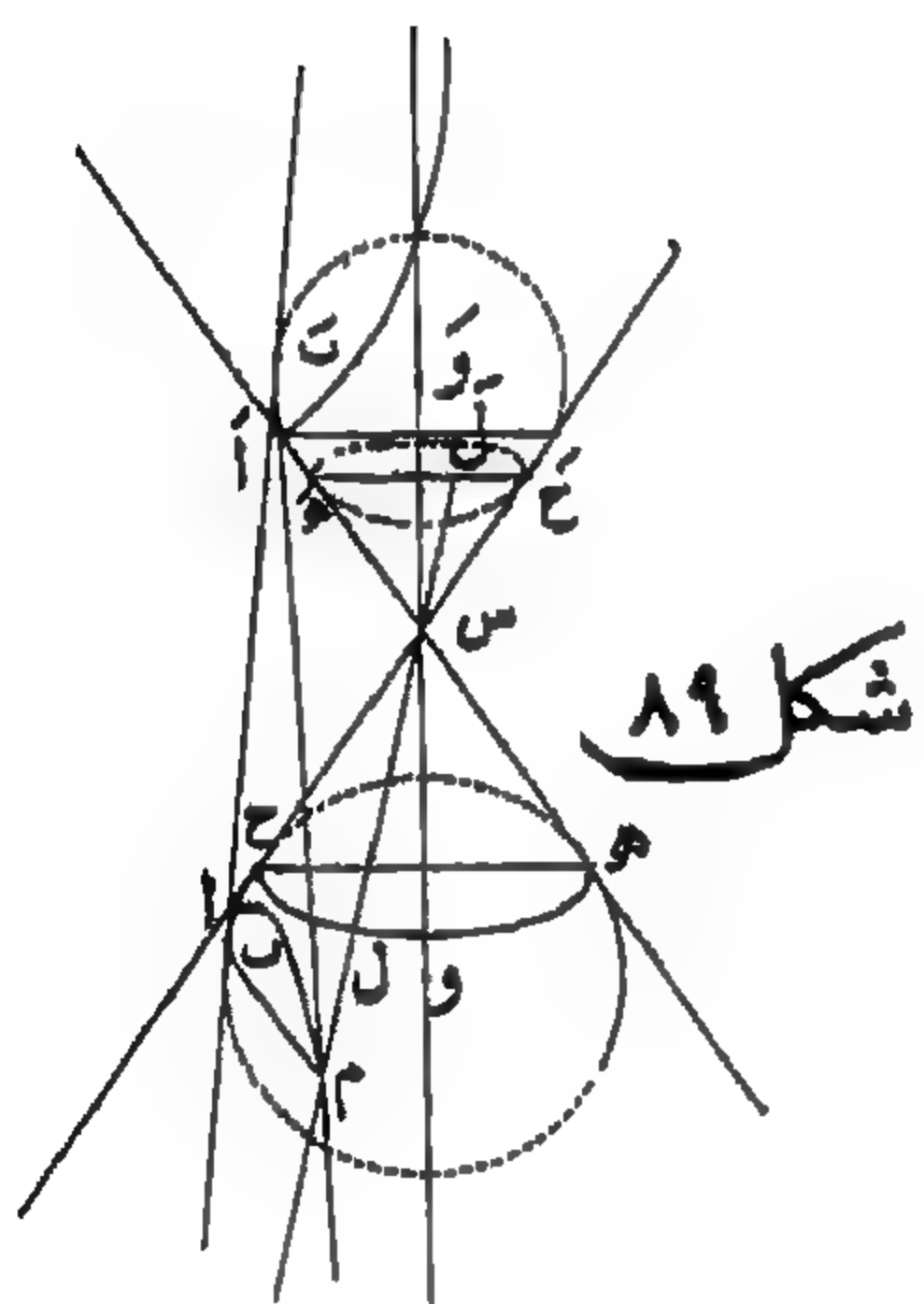
لكن بما ان

$$م ل + م ل = م ل + م ل$$

$$م ب + م ب = م ل + م ل$$

وحيث ان ل ل راس من رواسم المخروط الناقص المحدود بمستوى
 ح ل هـ ، ح ل هـ العموديين على المحور فيكون طوله ثابتا مهما
 تغير وضعه بتغير وضع النقطة م وبناء على ذلك يكون المنحني ا م آ
 الذى هو خط تقاطع المخروط بالمستوى ا آ قطعانا قصبا بورتاه
 هـ م ب ، ب لان مجموع البعدين الواصلين من أى نقطة منه
 كنقطة م مثلا الى البورتين ب ، ب مساو لقيمة ثابتة

١٤٨ الحالة الثانية - وهي الحالة التي يكون فيها المستوى
القاطع قاطعا لجميع رؤس المخروط لكنه ملاق بعضها في إحدى جهتي
رأس المخروط والبعض الآخر في جهتها الأخرى
فلنفرض مثلاً أن $اس ح$ ، $أس هـ$ شكل (١٩) هما
رأسا تقاطع المخروط المعلوم بمستوى الشكل وان خط $ا ا$
هو خط تقاطع المستوى القاطع مع مستوى الشكل المفروض
أنه عمودي عليه



ثم نرسم الدائرتين $هـ ح ب$ ،
 $ح هـ ب$ الماسيتين لاضلاع
المثلث $س ا ا$ من الخارج
ونتوهم كما في شكل ١٤٧ دورات
الجملة حول محور المخروط الذي
هو $وس و$ دائرة كاملة
فالدائرتان المتقدمتان ترسمان
كزيتين مماستين للمخروط في جميع
نقط الدائرتين الصغيرتين

$ح ل هـ$ ، $ح ل هـ$ والمستوى القاطع في نقطتين مثل $ب ر$
فاذا فرض حينئذ أن نقطة $م$ نقطة من منحنى التقاطع كان
المستقيمان $م ب$ ، $م ل$ متساويين لكونهما مماسين
للكرة $و$ من نقطة $م$ الخارجة عنها وكذلك يكون مستقيما
 $م ب$ ، $م ل$ المماسان للكرة $و$ متساويين فيحدث

$$م ب = م ل = م ل = ل ل$$

لكن من حيث أن المستقيم $ل ل$ ثابت الطول مهما تغير وضعه
لكونه جزأ من رأس المخروط محصورا بين مستويين عموديين
على المحور فيكون المنحنى قطعاً زائداً بورتاه $هـ ب ر$ وهو المطلوب
١٤٩ الحالة الثالثة - وهي التي يكون فيها المستوى القاطع موازياً

ويخرج من ذلك ان الثلاث نقط $هـ ر ل$ $م$ موجودة على
استقامة واحدة واذن يكون مثلثا $س هـ ل$ $م$ $هـ ل$
متشابهين ومن تشابههما يعلم انه حيث كان المستقيم $س هـ$
مساويا الى $س ل$ فيكون $م$ $هـ$ مساويا الى $م ل$ وعليه
يكون

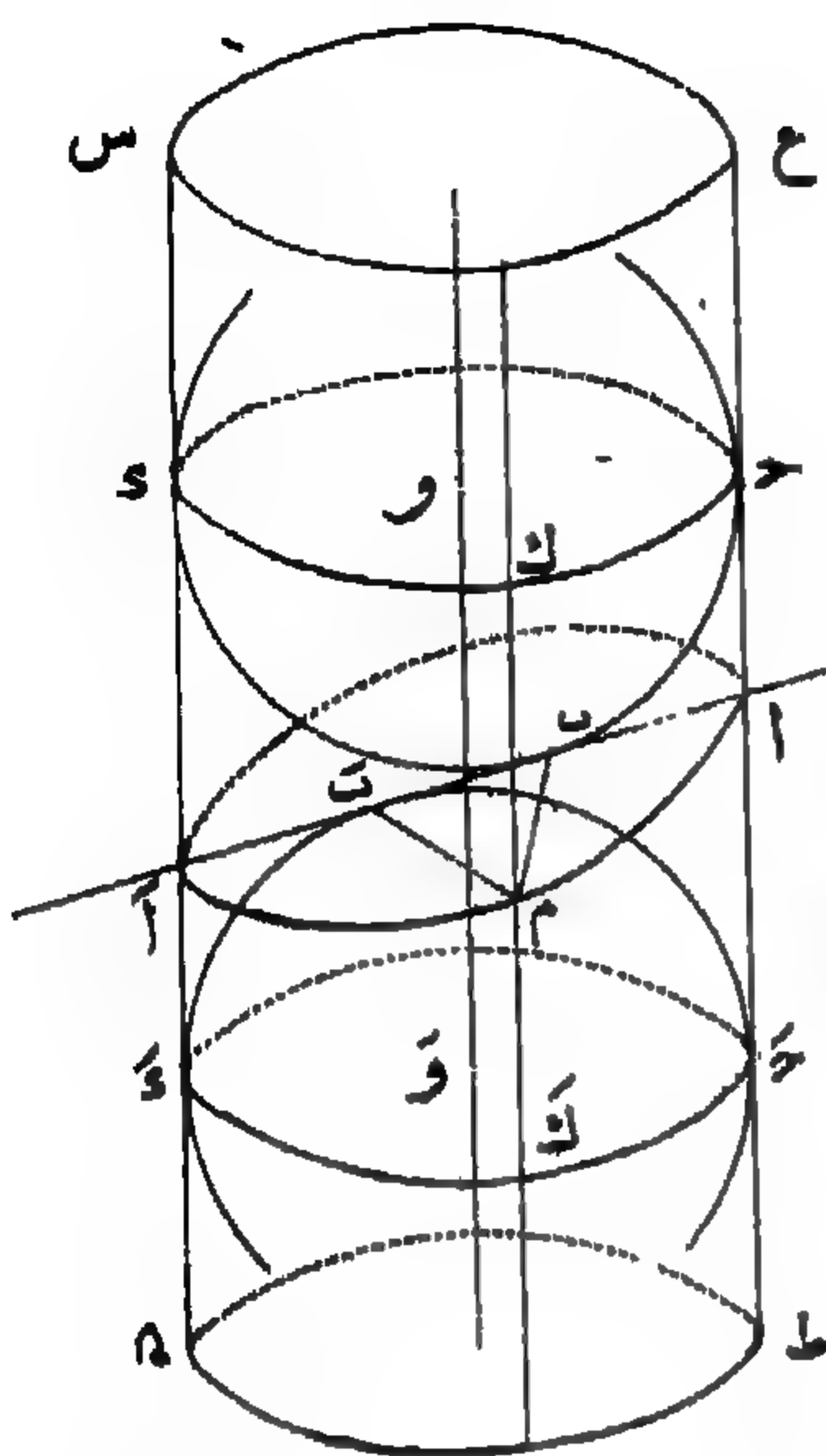
$$م ب = م هـ$$

ومن هذه المساوية قد اتضح ان منحنى التقاطع قطعاً مكافئاً
بوتره نقطة $ب$ ودليله المستقيم $هـ م$ وهو المطلوب
سأذكر قد ظهر حينئذ من النظرية المتقدمة بأحوالها ان الثلاثة منحنى
المتقدمة أعني القطع الناقص والقطع الزائد والقطع المكافئ
ناشئة كلها من تقاطع المستوي بالمخروط القائم ذي القاعدة
المستديرة ولذلك نراها متشابهة في أغلب الخواص وانما الفرق
الكائن بينها ناشئ فقط من اختلاف وضع المستوي القاطع
بالنسبة للمخروط المقطوع ولهذا الاسباب اشتهرت هذه المنحنيات
باسم القطاعات المخروطية

سأذكر القطع الناقص ينشأ أيضاً من تقاطع المستوي باسطوانة
قائمة مستديرة القاعدة وذلك في حالة ما يكون المستوي القاطع
المذكور ماثلاً على محورها

نعلم انه يمكن البرهنة على صحة هذه النظرية باعتبارها كسيلة
أو بحالة خصوصية من المسألة المتقدمة في سلك
اذ ان الاسطوانة يمكن اعتبارها كمخروط رأسه بعدت عن
القاعدة حتى صارت على بعد منها لا نهاية له ولكن لزيادة
الايضاح نبرهنها ببرهان مخصوص بها فنقول

لنفرض مثلاً ان المستقيمين $ع ط$ $س ج$ شكل (٩١)
هما رأساً تقاطع الاسطوانة المعلومة بمستوي الشكل
وان المستقيم $ا ب$ خط تقاطع مستوي الشكل بالمستوي
القاطع للاسطوانة المذكورة وهذا المستوي معتبر عمودياً



على مستوى الشكل ثم نرسم
الدائرتين ح ب د ر ح ت د
المماسيتين للرأسين ع ط ر س م
والمستقيم ا آ وننوه دوران
الجملة أعني الدائرتين والرأسين
حول محور الاستطوانة وهو و و
دورة كاملة فيتولد من هذا
الدوران الاستطوانة ع ط د س م
والكرتان و ر و التي احدهما
وهي العليا مماسة للاستطوانة
في الدائرة ح ك د والمستوى

ا آ في نقطة ب والاخرى
وهي السفلى مماسة للاستطوانة في الدائرة ح ك د والمستوى
ا آ في نقطة ب

اذا تقرر هذا وفرضنا ان منحنى تقاطع المستوى ا آ بالاستطوانة
ع ط د س هو المنحنى ا م آ واخذت عليه نقطة اختيارية
ولتكن م مثلاً ثم وصل منها الى نقطتي ب ر ك
بمستقيمي م ب م ر ثم رسمنا الراس م ك المار بها
وجدنا بمقتضى ما تقدم ان

$$م ب = م ك$$

وذلك لكونها مماسين للكرة و من نقطة م الخارجة
عنها وكذلك نجد بنفس هذا السبب ان

$$م ر = م ك$$

وبجمع هاتين المتساويتين على بعضهما طرفاً بطرف يحدث

$$م ب + م ر = م ك + م ك = ك ك$$

لكن

لكن حيث ان البعد ك ك ثابت الطول بما انه هو جزء الراسم
المحسور بين مستوئتي الدائرتين ح ك و ح ك و
المتوازيين لكونها عموديتين على المحور فيثبت المطلوب حينئذ
من ان المنحنى ا م آ قطع ناقص حيث ثبت ان مجموع البعد من
م م م ت الواصلين من أي نقطة منه كنقطة م المأخوذة
بالاختيار الى نقطتي ب ت الثابتين مساو لكمية ثابتة

الفصل الثاني

في بعض مسائل تطبيقية على الثلاثة

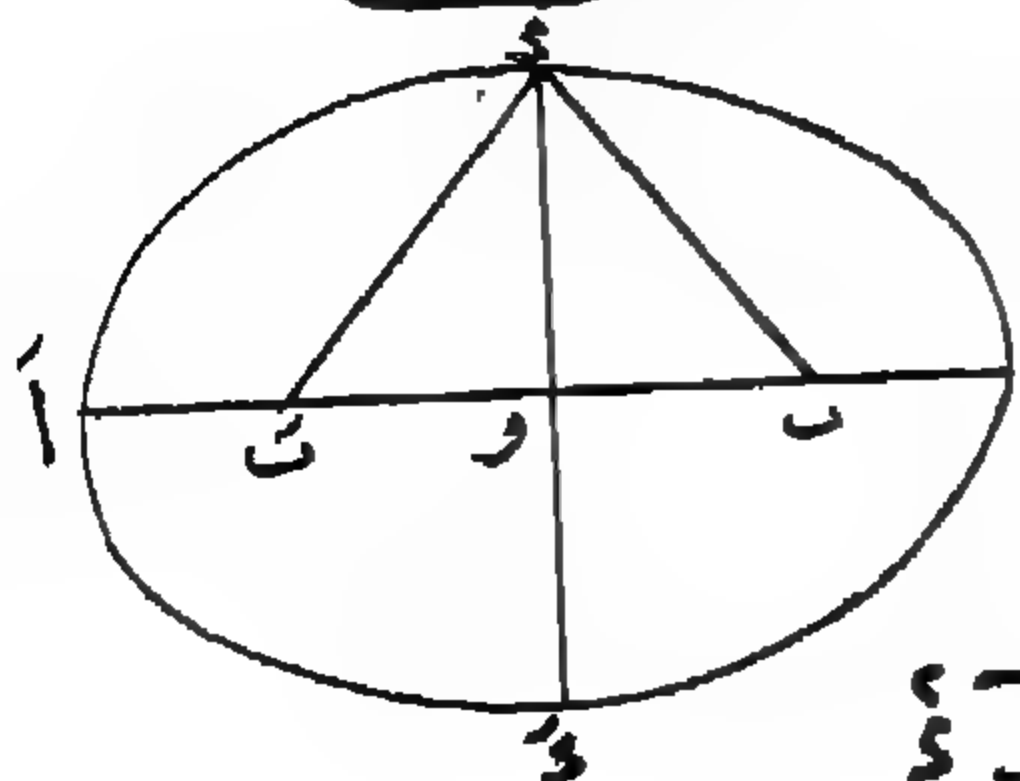
منحنيات المتقدمة

مسألة مسائل تختص برسم القطع الناقص

المسألة الأولى

ما مقدار طول الجبل أو الخيط اللازم لرسم قطع ناقص على الارض
بفرض ان المحور الأصغر لهذا القطع الناقص يساوي $\frac{1}{2}$ مسير
والبعد بين بورتيه يساوي $\frac{1}{2}$ مسير ومنفروض انه ستربط
نهايتا الخيط في مساران من مغروسين في البورتين وان قيمة ما يلف
على المساران من الخيط لاجل ربطه بهما غير محسوب في طول الجبل
المطلوب

شكل ٩٢



لاجل حل هذه المسألة يقال من

مثلث ب و د شكل (٩٠)

القائم الزاوية في و يعلم

بمقتضى شك أن

$$ب د = ب و + و د$$

ومن هذا القانون المشتغل على الارتباط الواقع بين نصف المحور
الأكبر للقطع الناقص ونصف محور الأصغر ونصف البعد الكائن
بين البورتين يعلم أن

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

فاذا وضعنا بدل كل حد مقداره ورمزنا بحرف س لنصف
المحور الأكبر المجهول يكون

$$s = \sqrt{a^2 - c^2}$$

أو $s = \sqrt{a^2 - c^2}$ ، $a = ٨٠$ ، $c = ١٤$ ، $s = ٧٩$ تقريباً
وعلى ذلك يكون s أعني المحور الأكبر مساوياً إلى ٧٩
٤٦ ، وهو طول الجزء الخالص من المحيط المطلوب

المسألة الثانية

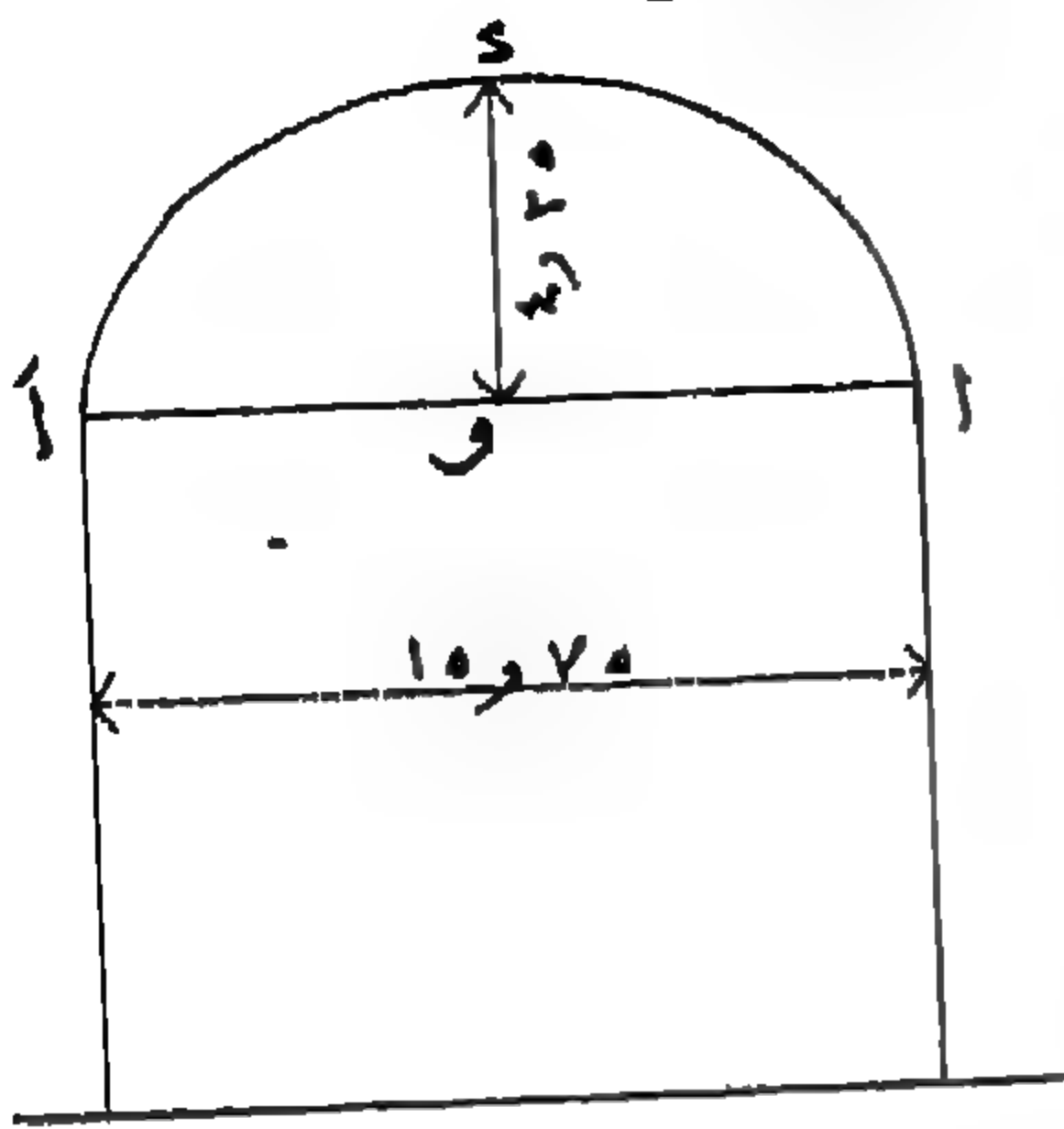
أخذ حبل وعقد طرفاه ببعضهما وكان طول محيطه بعد
العقد مساوياً إلى ٤٦ ، ورسم به قطع ناقص بطريقة
الاستمرار المقردة في سعة لكن مع جعل المحيط لا فاقاً على المسارين
المغروسين في البورتين لامتزاجهما من طرفيه بهما كما في المسألة
الأولى فوجد أن المحور الأصغر للقطع الناقص الحادث مساوياً إلى
١٤ ، فكم كان البعد بين المسارين

الجواب — كان المساران مغروسين على بعد ٥٢ من بعضهما

المسألة الثالثة

نحات يشتغل بنحت أحجار عقد ناقص لقطرة فتحت عينها أعني البعد
١١ = $\sqrt{٥٠}$ ، $c = ١٤$ ، $a = ٩٤$ ، وارتفاع تنقيتها أعني
مقدار ارتفاع مفتاحها عن مستوى المبدأ وهو البعد $a = ٩٤$ ، $c = ١٤$

شكل ٩٣



فيلزمه بالضرورة ان يرسم هذا
القطع الناقص على حائط مستو
بواسطة المسطرة كما في شكل
ليرسم عليه تفاصيل العقد المطلوب
فكيف يصنع النخات بالمسطرة
لرسم القطع الناقص المذكور
الجواب - يعلم على حرف
المسطرة ثلاث نقط بحيث يكون
بعدا النقطتين المتطرفتين عن بعضها
يساوي $٧/٨٧٥$ متر وبعد النقطة

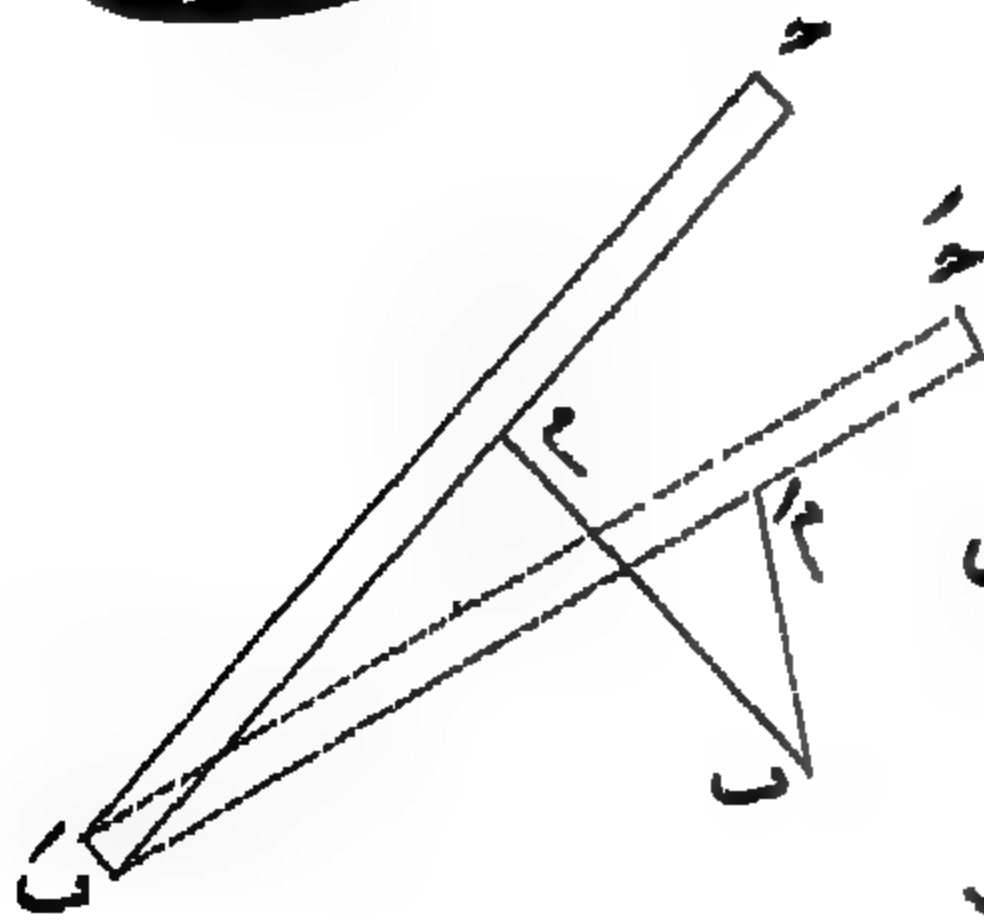
المتوسطة عن احدى هاتين النقطتين يساوي ٦٠٥ متر
ويجري العمل كما في شكل

المسألة الرابعة

كيف يصنع هذا النخات بعينه في المسطرة اذا اراد ان يرسم القطع
الناقص المتقدم بالطريقة المبينة في شكل
الجواب - يعلم على المسطرة ثلاث نقط بحيث يكون بعدا المتطرفتين
عن بعضهما يساوي ١٠٥ متر وبعد النقطة المتوسطة عن احداهما
يساوي ٢٠٥ متر ويتم العمل طبقا لـ

المسألة الخامسة

شكل ٩٤



غرس في نقطتي $ب$ و $ج$ شكل (٩٤)
من الارض مسباران متباعدا عن
بعضهما بقدر ٨٠ متر
واخذت مسطرتي طولهما ٤٠ متر
وخط طولهما كطول المسطرة ثم وضعت
المسطرة في وضع كالوضع $ب-ج$ بان
كان طرفها $ب$ مماسا للمسبار المغروست

في هذه النقطة أما الخط فقد ثبت أحد طرفيه في المسار ب
وطرفه الآخر في النهاية الأخرى من المسطرة وهي ت ثم شد الخيط
بواسطة قلم الرسم بجانب المسطرة حتى أخذ الوضع ب ب م ت
وبعد ذلك حركت المسطرة مع بقاء الخيط على الدوام مشدودا
بقلم الرسم فما يكون جنس المنحنى الذي يرسمه القلم في أثناء
الحركة وما مقدار انحناءه

الجواب - المنحنى المرسوم قطع ناقص محوره الأكبر ٤٠ سم
ومحوره الأصغر ٧٦ سم (انظر بندي ٥٥ ر ٥٦)
مسألة مسائل تتعلق بمساحة القطع الناقص

المسائل الساتية

مدرسة التجهيزية استعارت من جنينة مدرسة المتديان
خضاراً لمؤونة تلاميذها حين طلوع الخضر المزروع في جنينة
التجهيزية فتعوضه لها بكية من نفس الخضر مساوية لما استعارت
مها فأخذت التجهيزية جميع ما كان مزروعاً في حوض من الأرض
شكله ناقص طول محوره الأكبر ٥٠ متر وطول محوره الأصغر
١٠ متر ولما طلع الخضر من جنينة التجهيزية حضر الباغشونجي
من المتديان ليستردها أخذ من جنينته فانتخب له باغشونجي
التجهيزية حوضاً ناقصاً أيضاً لكن طول محوره الأكبر ٤٧ متر
وطول محوره الأصغر ١٢ وقال له ان مساحة هذا
الحوض مثل مساحة الحوض الذي أخذناه منك لانه أطول من
حوضكم بمترين وأقل منه في العرض بمترين فهو حينئذ
قدره فخذ ما فيه من الخضر فقبل ذلك من مسلكاً وأخذ
ما في الحوض المذكور فأى الباغشونجيين أمكر من أخيه

الجواب - باغشونجي التجهيزية كان أمكر لانه أعطى
للثاني حوض خضار تنقص مساحته عن مساحة الحوض الذي أخذ
من المتديان بقدر ٤٠ ر ٤٠ متراً مسطحاً

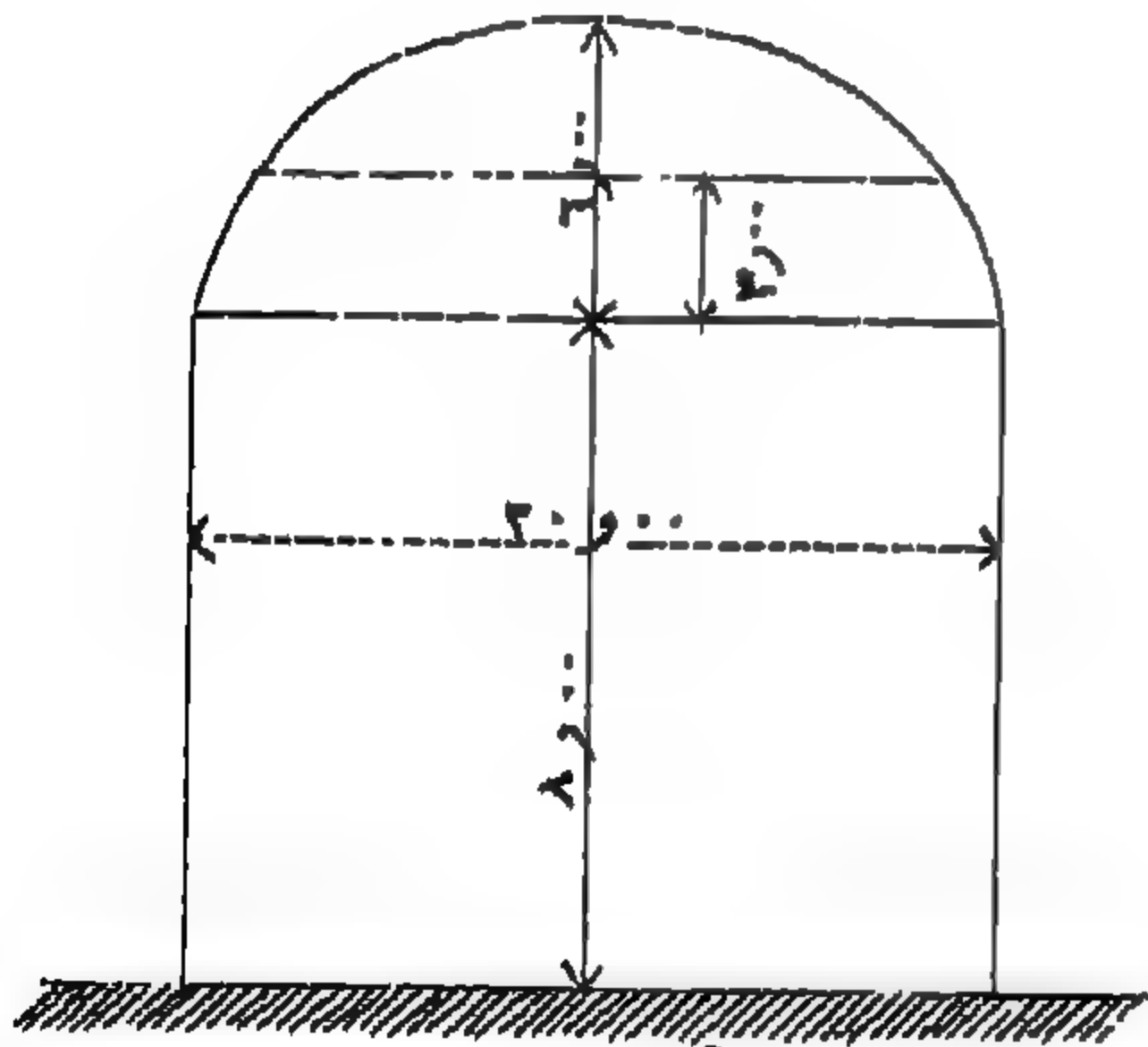
المسألة السابعة

حوض ناقص من الأرض مساحته نصف فدان وطول محوره
الأصغر أربعون مترا فما يكون طول محوره الأكبر وما البعد بين
البورتين وما مقدار طول الجبل الذي استعمله الحناري
لرسمه بواسطة الطريقة المقررة في شكل (طريقة ثانية)

للجواب - المحور الأكبر يساوي ٨٦ ، ٦٦ م والبعد بين
البورتين يساوي ٥٦ ، ٥٤ م وطول الجبل الذي لزم
لرسمه يساوي ٤٢ ، ١٢٠ مترا

المسألة الثامنة

المعلوم قنطرة ذات عين واحدة شكل (٩٥) عرضها يساوي
شكل ٩٥



٠٠ ، ٠٠ متر وارتفاع كتفها
... ٨ متر لحد مستوى مبدء
عقدتها المفروضة أنه نصف قطع
ناقص محوره الراسي ٠٠ ، ٠٠ متر
أعني أن ارتفاع المفتاح عن
مستوى المبدء يساوي ٠٠ ، ٠٠ م
ثم منها مياه التربة الموضوعة
عليها هذه القنطرة فإذا فرضنا
أن المياه فاضت إلى أن ارتفع سطحها

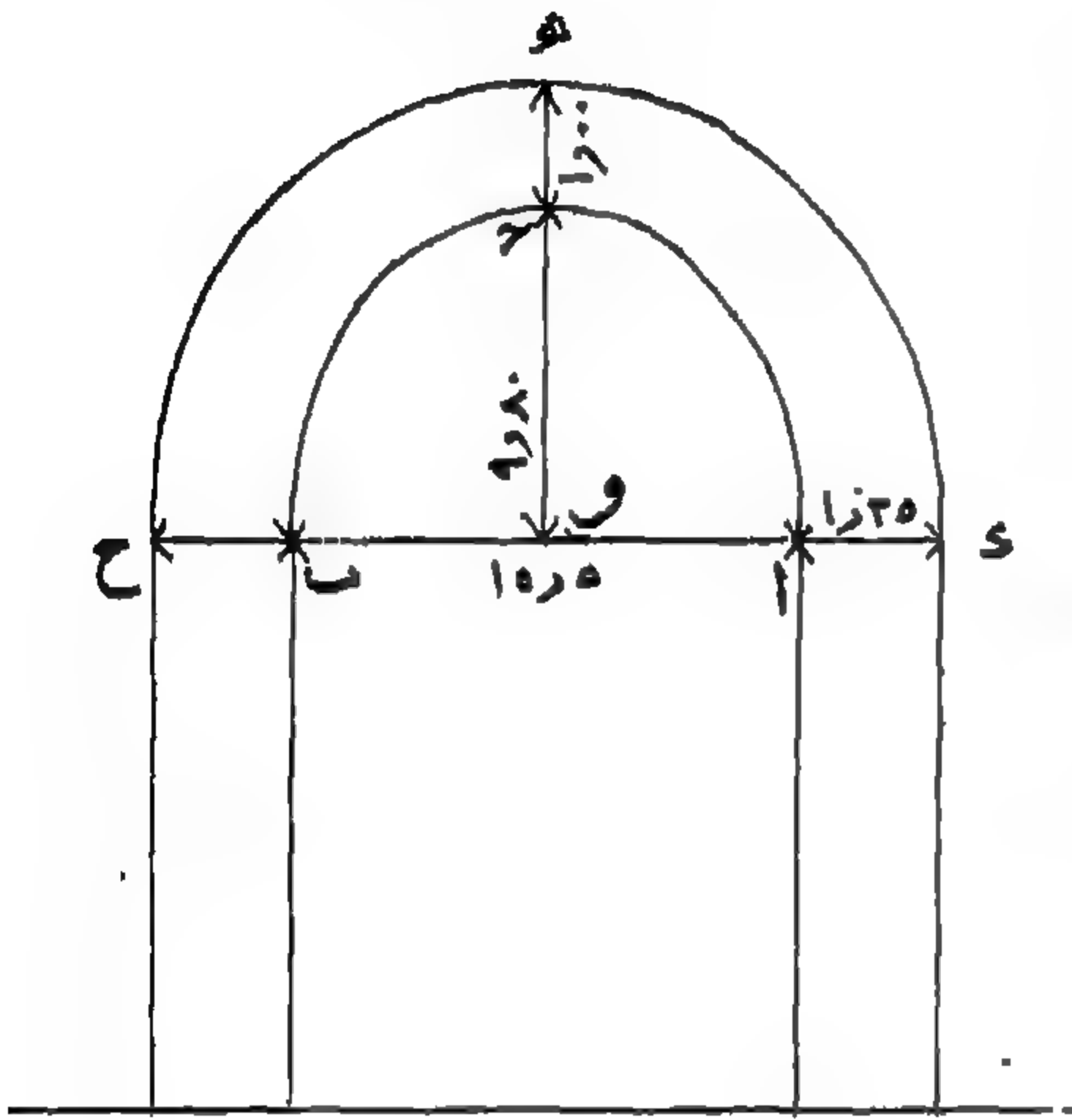
عن مستوى مبدء العقد بقدر ٠٠ ، ٠٠ متر فما يكون مقدار سطح
القطاع المغمور بالماء من عين القنطرة
الجواب - القطاع المغمور بالماء يساوي ١٦ ، ٤٥ ، ١٩٥
مترا مسطحا والحل يؤخذ من شكل

سؤال مسائل تتعلق بمجسم المجسم الناقص

المسألة التاسعة

المعلومة قبة ناقصة شكل (٩٦) كالقبة التي سطح تنفيضا

شكل ٩٦



أي سطحها الداخلي كناية عن سطح
مجسم القطع الناقص التقرني
الناشئ من دوران نصف
القطع الناقص $ا ح ب$
حول المحور الراسي $و ح$
الذي هو عبارة عن المحور
الأكبر لهذا القطع الناقص
وسطح تجريد القبة أي سطحها
الخارج عبارة عن سطح مجسم
القطع الناقص الناشئ من
دوران $و ح$ حول نفس
المحور $و$ الراسي

والمطلوب معرفة حجم البناء الموجود في هذه القبة من بعد
معرفة أن المحور الأصغر $ا ب$ للقطع الناقص الداخلي يساوي ٥
 ٥ ر ٥ ٥ ونصف المحور الراسي وهو $و ح = ٨$ ر ٩ م ٩ م ٩ م
أن سمك العقد عند مبدئه وهو البعد $ا و = ٥$ ر ٥ ر ٥ م ٥ م
عند المفتاح وهو البعد $و ح = ٥$ ر ٥ م ٥ م

الجواب - حجم البناء الموجود في هذه القبة وحدها من غير
الأكثاف يساوي ٤٩ ر ٥٩٩ متر مكعبا
(والحل مبني على ما هو مقدر في سؤال ٧٩)

المسألة العاشرة

صالح كبير محاطة من جميع الجهات بخائط اسطوانية

قاعدة

قاعته قطع ناقص مثل الصّالة العموميّة الموجودة بمحل ديوان
المعارف ومعقودة من الأعلى بعقد ناقص تحركى ناشئ من
دوران نصف القطع الناقص الموجود في مستوى مبدأ العقد
والذى هو كناية عن القاعدة العليا لاسطوانة حائط الصّالة
حول محوره الأكبر الذى هو كناية عن طول هذه الصّالة والمطلوب
معرفة مقدار فارغ هذه الصّالة أو بعبارة أخرى إيجاد حجم
الهواء الموجود في هذه الصّالة بما فيها من حجم فارغ الجزء الاسطوانى
وحجم فارغ العقد وذلك من بعد معرفة ان المحور الأكبر لقطع ناقص
قاعدة الاسطوانة المحددة لحائط الصّالة من الداخل يساوى
٦ ، ٢٩ ومحور الاضغرساوى ٥ ، ٢٥ وارتفاع الصّالة
من ابتداء سطح البلاط لغاية مستوى مبدأ العقد الناقص
المغطى للصّالة يساوى ٥ ، ٢٧
الجواب - حجم الهواء الموجود في هذه الصّالة يساوى
٣٢ و ٣٠٢ متر مكعباً

الباب السادس

في المنحنيات الكثيرة المراكز المعروفة بالمنحنيات

الفصل الأول

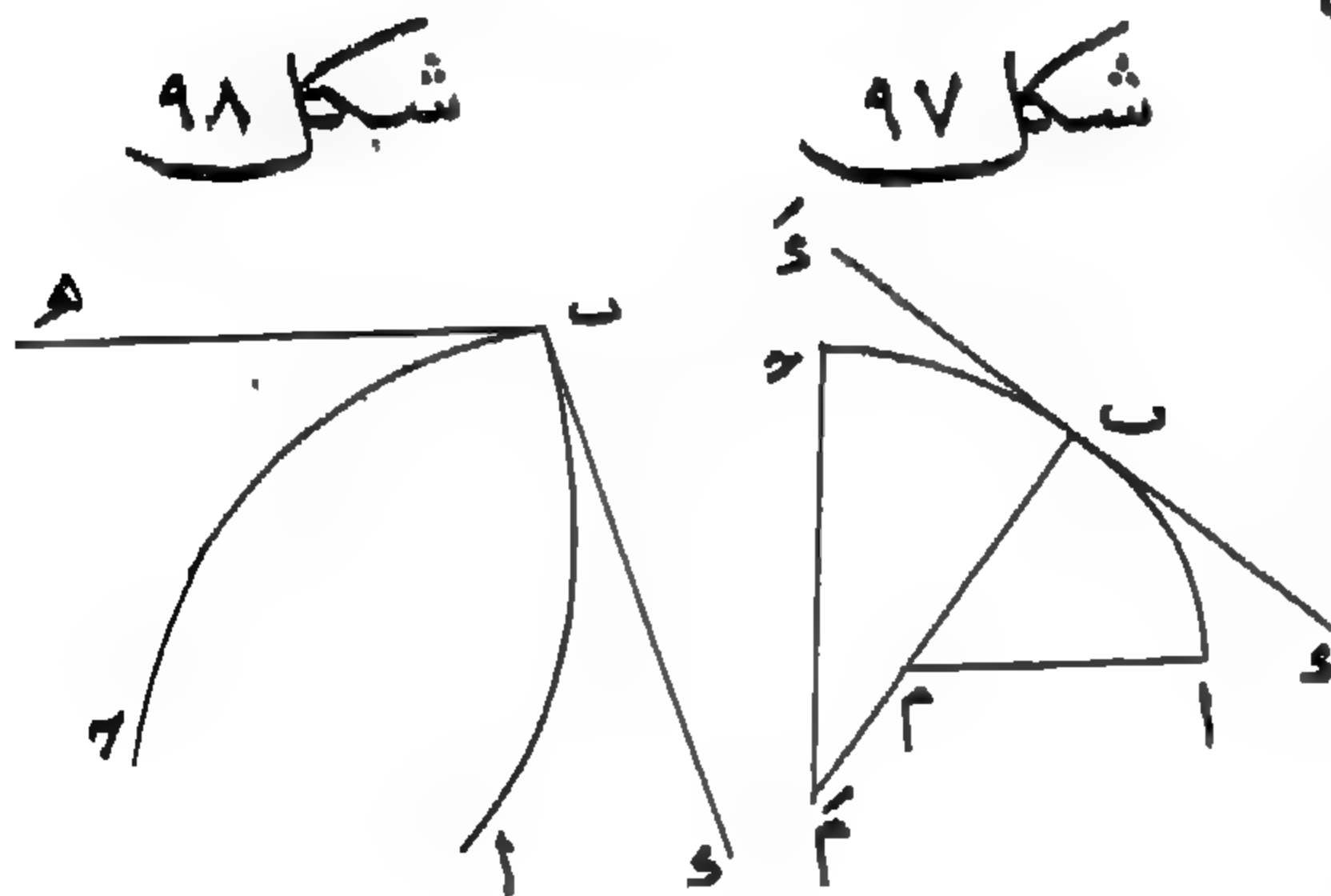
في المنحنيات المرجونيّة ذات الثلاثة مراكز

مبدأ - المنحنى المرجونى الثلاثى الذى يستعمل كثيراً
في فن العمارة وخصوصاً في القناطر ليس في الحقيقة بمنحنى
خصوصياً بسيطاً بل هو منحنى مركب من ثلاثة اقواس دوارة
متصلة مع بعضها بحيث يتكون عن مجموعها منحنى واحد تقليد

القطع الناقص

ويقال ان القوسين المتصلين ببعضهما متفقين معاً اذا كانتا متماستين في نقطة الاتصال بمعنى ان يكون المماس لكل منهما في النقطة المذكورة واحداً لانه ان لم يحصل هذا الشرط كان الممختان المتصلان ببعضهما متقاطعين وصانعين بينهما زاوية رأسها في نقطة الاتصال او التقاطع

مثلاً القوسان ا ب ر ح شكل (٩٧) المتصلان ببعضهما في نقطة ب



ومركز أولها في نقطة م ومركز الآخر في نقطة ن هما متفقان معاً لأنها متماستان في نقطة الاتصال ب بما أن المماس لكل منهما في تلك النقطة واحد وهو المستقيم د ب د

وأما قوساً ا ب ر ح شكل (٩٨) فلا يقال لهما متفقان في نقطة ب ولوانهما متصلان ببعضهما فيها لأنها ليستا متماستين في تلك النقطة لكون المماسين لهما فيها وهما ب د و ب ه متميزين

٥٦ د في طرق رسم المنحنى المجوف — قد علم من تعريف المنحنى المجوف المقرر في البند السابق أن هذا المنحنى يتكون كما في شكل (٩٩) من ثلاثة أقواس دواثر مثل ا م ب م ب م ب م د متماسّة مع بعضها مشني ومراكزها ينبغي ان تكون موضوعة على المحورين واروب العلويين من رأس المسألة لكي يكون المماسان للمنحنى في نقطتي ا و د اللتين هما مبدأ المنحنى رأسيين والمماس له في نقطة ب أفقيًا لأن

الحصول على عدة حلول غير متناهية أعني أنه يمكن رسم عدة منحنيات مرجونية كلها موفقة للشروط المفروضة في المسألة لكنها تختلف عن بعضها في الهيئة والمنظر واللياقة للاستعمال في العقود بمعنى أنه لا يصح أخذ أي واحد منها بطريقة اختيارية واستعماله في العقود لأنه ربما كانت هيئته ومنظره وقابليته لا تساعد على ذلك ولهذا قد اختلفت الآراء بوضع بعض شروط لانتخاب الالتيق منها حتى يكون منظره لطيفاً وشكله موافقاً وتنوع هذه الشروط بحسب الاحتياجات قد تنوعت طرق رسم المنحنى المرجوني وهانحن شارعون في ذكر الكثير للاستعمال منها على الترتيب فنقول

٥٧. الطريقة الأولى قد جرت العادة في الغالب أن يجعل القوس أم شكل (٩٩) السابق ٦٠ فينبغي على ذلك صيرورة المثلث ح ح ح المتساوي الساقين مثلثاً متساوياً الأضلاع وبصير القوس م م م مساوياً الم ٦٠ كذلك وحينئذ فلورمز بحرف س إلى البعد وح المجهول

لصكان $س = ا - س$ ، $س = ا + س$ وتؤول معادلة (١) السابقة من بعد كل اختصار إلى

$$س - (ا - ب) = س \frac{(ا - ب)}{٢}$$

التي يؤخذ منها أن

$$س = \frac{ا - ب}{٢} + \frac{ا - ب}{٢} س \dots \dots (٢)$$

وقد صرفنا النظر هنا عن المقدار السالب للمجهول س للأسباب المعلومة

وأما مقدار س المبين بتمرة (٢) فيمكن بيانه بالطريقة الرسمية كما سيأتي وهو

وهو ان يؤخذ البعد $وه = ا - ب$ ، وح $= \frac{1}{2}$ وه
ثم يرسم على البعد ه ح نصف دائرة يكون هو قطر الـ هـ هـ
النصف دائرة يقطع المحور الرأسى في نقطة مثل ط فاذا نقل
الوتر ح ط من ح الى ح كان البعد وح هو مقدار
س المبين بمعادلة (٤)

فيرسم اذ ذاك على البعد ا ح مثلث متساوى الاضلاع
مثل ا م ح الذى اذا مد ضلعه م ح على استقامته حتى
يقطع امتداد المحور الرأسى في نقطة مثل ح كانت هي مركز
القوس م ب م وكان البعد ح م نصف قطر
ولاجل البرهنة على ان وح يساوى لمقدار س المبين
في معادلة (٤) يقال من الشكل ظاهر ان

$$وح = وح + ح ح \dots \dots (٥)$$

لكن كان $وح = \frac{ا - ب}{٢}$ بالعدل

وكذا معلوم يقتضى احدى نظريات الهندسة العادية ان الوتر
ح ط وسط متناسب بين ح ه ح و فيكون

$$ح ط = [(ا - ب) + (ا - ب)] \frac{ا - ب}{٢}$$

وباجراء عملية الضرب واختصار الناتج يكون

$$ح ط = \frac{(ا - ب)^٢}{٢}$$

وبأخذ الجذر يحدث

$$ح ط = \frac{ا - ب}{٢}$$

فاذا وضعنا بدلا عن كل من وح ح المساوى الى
ح ط مقداريهما في معادلة (٥) لكان

$$\text{وح} = \frac{\text{ا-ب}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا-ب}}{\text{ب}} \quad ٣٧$$

وهذا هو ما اردنا بيانه

نشهد الطريقة الثانية - قد اعطى بعض المؤلفين قاعدة مختصة لبيان مقدار س بالرسم لكنها تقريبيه ويمكن استعمالها مع النجاح في رسم العقود ذوات الابعاد الصغيرة جدا او في رسم زخارف العمارات وما أشبه ذلك وغاية هذه الطريقة ان يؤخذ البعد و-ح مساويا الى ا-ب ويضاف عليه بعد مثل ح-د مساو لثلث و-ح فتكون نقطة د هي المركز الاول المطلوب ويكون وح مساويا بالتقريب الى مقدار س الموجود بمعادلة (٤٠) وبيان ذلك يكفي ان نبرهن على ان البعد $\text{وح} = \frac{\text{ا-ب}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا-ب}}{\text{ب}}$ (٣٧) تقريبا وهذا هو الواقع لأن

$$\frac{\text{ا-ب}}{\text{ا}} = \frac{\text{ا-ب}}{\text{ا}} = \frac{\text{ا-ب}}{\text{ا}} \quad \text{مقربا من } ٠.٦$$

فاذا نظرنا الى مقدار س المبين في معادلة (٤٠) نجد ان

$$\text{س} = \frac{\text{ا-ب}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا-ب}}{\text{ب}} \quad ٣٧$$

وبأخذ $\frac{\text{ا-ب}}{\text{ا}}$ مضروبا مشتركا في الطرف الثاني يحدث

$$\text{س} = \frac{\text{ا-ب}}{\text{ا}} (١ + \frac{\text{ا-ب}}{\text{ب}})$$

أو يكون

$$\text{س} = \frac{\text{ا-ب}}{\text{ا}} (١ + \frac{\text{ا-ب}}{\text{ب}}) = \frac{\text{ا-ب}}{\text{ا}} \times \frac{\text{ا+ب}}{\text{ب}}$$

أو

$$\text{س} = \frac{\text{ا-ب}}{\text{ا}} (١ + \frac{\text{ا-ب}}{\text{ب}}) = \frac{\text{ا-ب}}{\text{ا}} (٢ - \frac{\text{ا-ب}}{\text{ب}}) \quad \text{تقريبا}$$

وهو المطلوب

ويكون مقدار س المستخرج بهذه الكيفية أصغر من حقيقته

بقدر

ولذلك يقال ظاهر من الشكل كل بناء على الاجراءات التي علمت ان

ومن مثلت $\text{م ه ت} = \text{م ه}$ يمكن ان يستخرج مقدار م ه فيجاء ان

$$\text{م ه} = \text{ت ه} \times \frac{\text{حاه}'}{\text{حاه}''}$$

وعليه يكون

$$\text{وح} = \text{ت ه} \times \frac{\text{حاه}'}{\text{حاه}''} \dots \dots (هـ)$$

ولكن معلوم ان $\text{ت ه} = (١ - ب)$

وان $\text{حاه}' = \text{حاه} = (\text{حاه}'' + \text{حاه}') = \text{حاه}'' + \text{حاه}'' = ٢ \text{ حاه}''$

فاذا لاحظنا ان $\text{حاه}'' = \frac{١}{٤}$ و $\text{حاه}' = \frac{١}{٢}$

وان

$$\text{حاه}'' = \frac{١}{٤} \text{ و } \text{حاه}' = \frac{١}{٢} \text{ ايضا}$$

اتضح لنا ان

$$\text{حاه}' = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢}$$

وحينئذ اذا وضع بدلا عن كل حد مقداره في معادلة (هـ) نحصل

$$\text{وح} = (١ - ب) \times \frac{\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢}} = (١ - ب) \times \frac{\frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}}{\frac{١}{٢}}$$

أو يكون

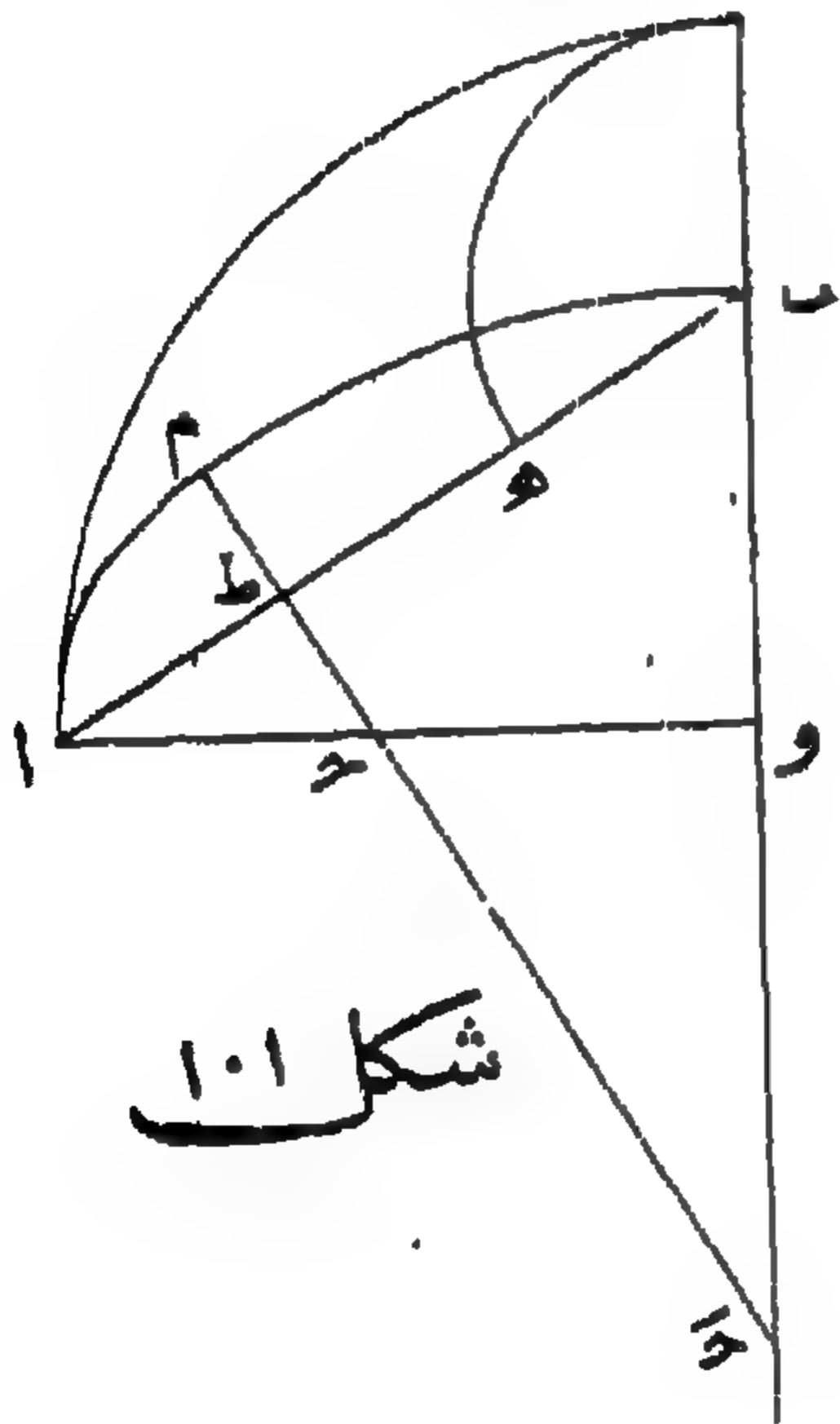
$$\text{وح} = (١ - ب) \times \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \right) = (١ - ب) \times ١$$

أو يكون

وح

وح $= (١ - ٣) \times \frac{١}{٢} (٣ + ١) = \frac{١}{٢} (٣ - ١) = (٣ + ١)$
 وحيث ظهر من سياق البرهان أن البعد وح مساوٍ لمقدار س
 السابق فهذا كافٍ لإثبات المطلوب

سند الطريقة الرابعة - هذه الطريقة التي سنقتصر فيها
 على شرح كيفية العمل بها بدون أن نورد اثباتها لعلوه وتبذره
 على تلامذة التجهيزية الذين قد أعددت كتاباً في هذا لهم ولمن في
 درجة معارفهم هي الطريقة التي يجب استعمالها في حالة ما يراد
 رسم منحنى مرجو في تكون النسبة الواقعة بين نصفي قطريه بعد
 أصغر جميع النسب الممكن وقوعها بين نصفي القطرين المذكورين
 أغنى هي أقرب تلك النسب إلى الواحد الصحيح
 وغاية هذه الطريقة هي أن



نصل أول الوتر AB
 شكل (١٠١) ثم يطرح
 منه البعد BC المساوي
 إلى الفرق $(١ - ٣)$ الواقع
 بين نصفي المحورين ثم يقام من
 نقطة C التي هي منتصف
 الجزء الباقي من الوتر عمود مثل
 CE عليه فهذا العمود
 يقطع المحورين في نقطتين
 مثل D و E تكونان
 مركزا للقرسين AM و

BM ويكمل رسم النصف الأيمن من المنحنى بالتماثل مع النصف الأيسر
 الذي رسم

سند الطريقة الخامسة - هذه الطريقة التي لم نذكر
 اثباتها لنفس السبب الذي أوريناه في البند السابق يلزم
 استعمالها في حالة ما يراد رسم المنحنى المرجو فيكون الفرق

بين نصفين قطريه $هـ$ $هـ$ $هـ$ أصغرهما يمكن

وهو ان يؤخذ البعدان $و$ $و$

$و$ $و$ $و$ شكل (١٠٢)

متساويين وكل منهما مساو

الى الفرق $(ا - ب)$

الكان بين نصفين المحورين

ثم نصل المستقيم $هـ$ $هـ$

وينصف بنقطة مثل $ط$

وينقل البعد $هـ$ $ط$ على المحور

الافقي من ابتدا نقطة $هـ$ لنقطة مثل $ح$ وكذا ينقل البعد

$هـ$ $ط$ بالابتداء من نقطة $هـ$ لنقطة مثل $ح$ على المحور الرأسى

فتكون نقطتا $ح$ $ح$ هما مركزا القوسين $ام$ $ام$ $ب$

ويرسم النصف الايمن بالتماثل كما مر

بجدد الطريقة السادسة — هذه الطريقة تستعمل

في حالة ما يراد رسم القوس الاسفل اعنى المجاور لبدء المنحنى كيفية

اختياره حسب ما تقتضيه استعمالات المنحنى المرجوف الذى

يراد انشاؤه ثم يرسم القوس الثانى الاكبر مما سأل والمستقيم

الافقى الثمار بالرأس العليا للمنحنى وببيانها كالاتى

مثلا اذا اريد رسم منحنى

مرجوفى ذى ثلاثة مراكز

على نصفين المحورين $وا$ $وب$

شكل (١٠٣) يبتدأ أولا

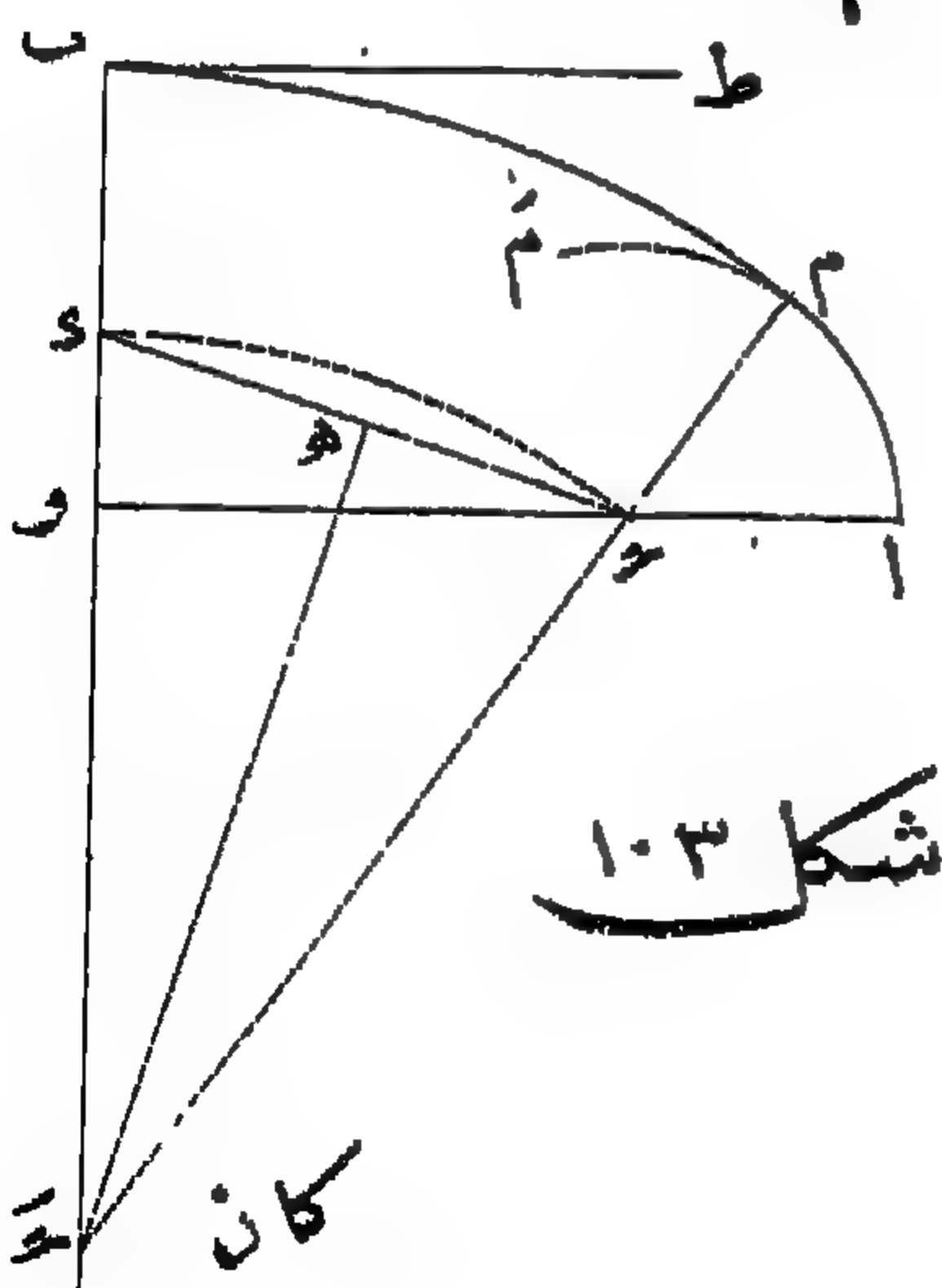
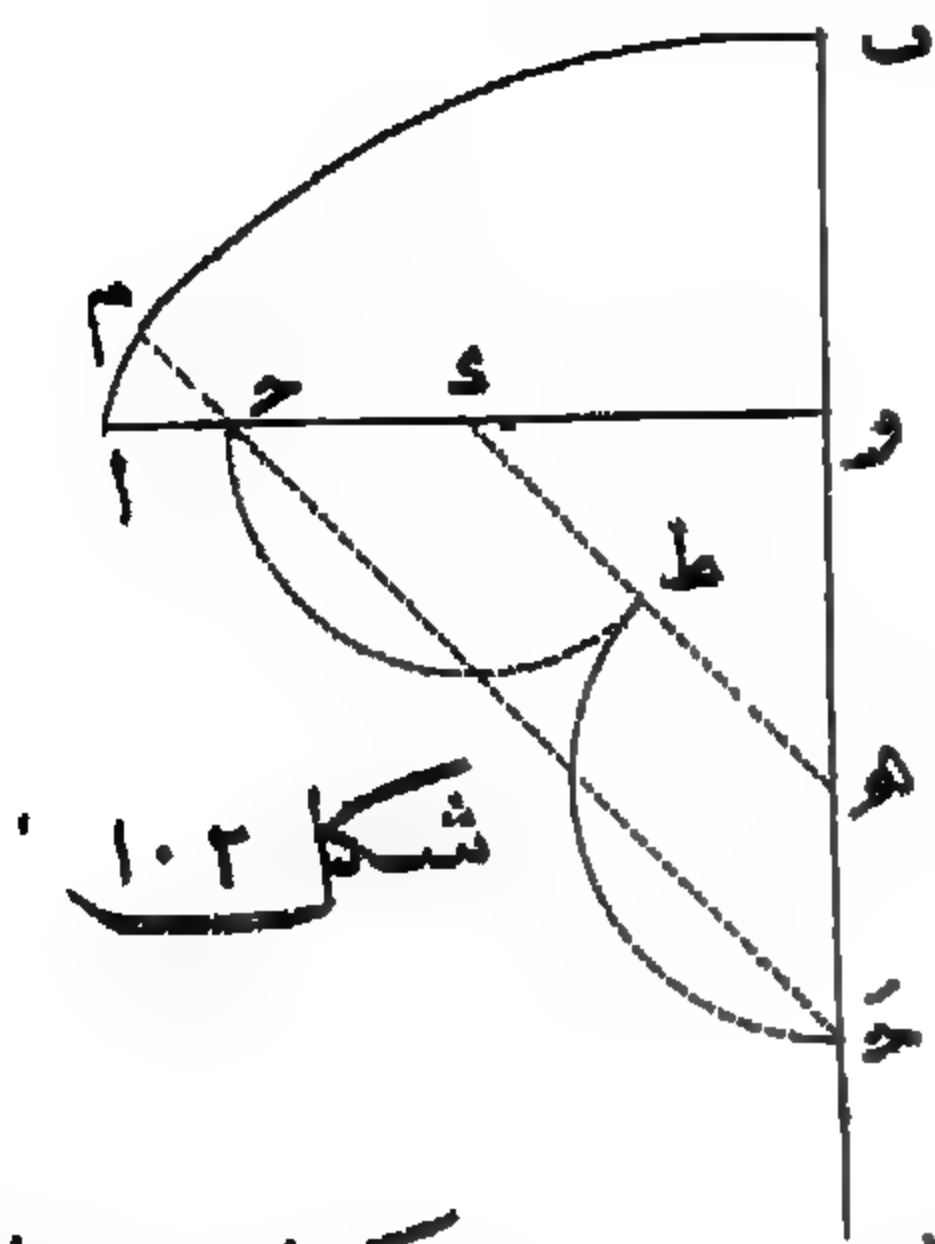
برسم القوس $ام$ $م$ الغير

محدود ويؤخذ نصف قطره

وهو $ح$ $ا$ اختيارا ويجب

ما يراد اعطاؤه الى ذلك القوس

من التخليل والارتفاع كثيرا



كان أوقليلاً فتؤول المسئلة بعد ذلك إلى رسم قوس كالقوس
 م ب بحيث يكون مماساً للقوس الغير المحدود ا م م في نقطة
 مثل م والمستقيم الافقى ب ط في نقطة ب
 ولأجل حل هذه المسئلة الفرعية نفرضها محلولة وإن للقوس
 المطلوب هو م ب الذي مركزه نقطة ح ثم جعلنا هذه
 النقطة مركزاً وبنصف القطر ح ح رسمنا قوس دائرة فيقطع
 المحور و ب في نقطة مثل د ويكون

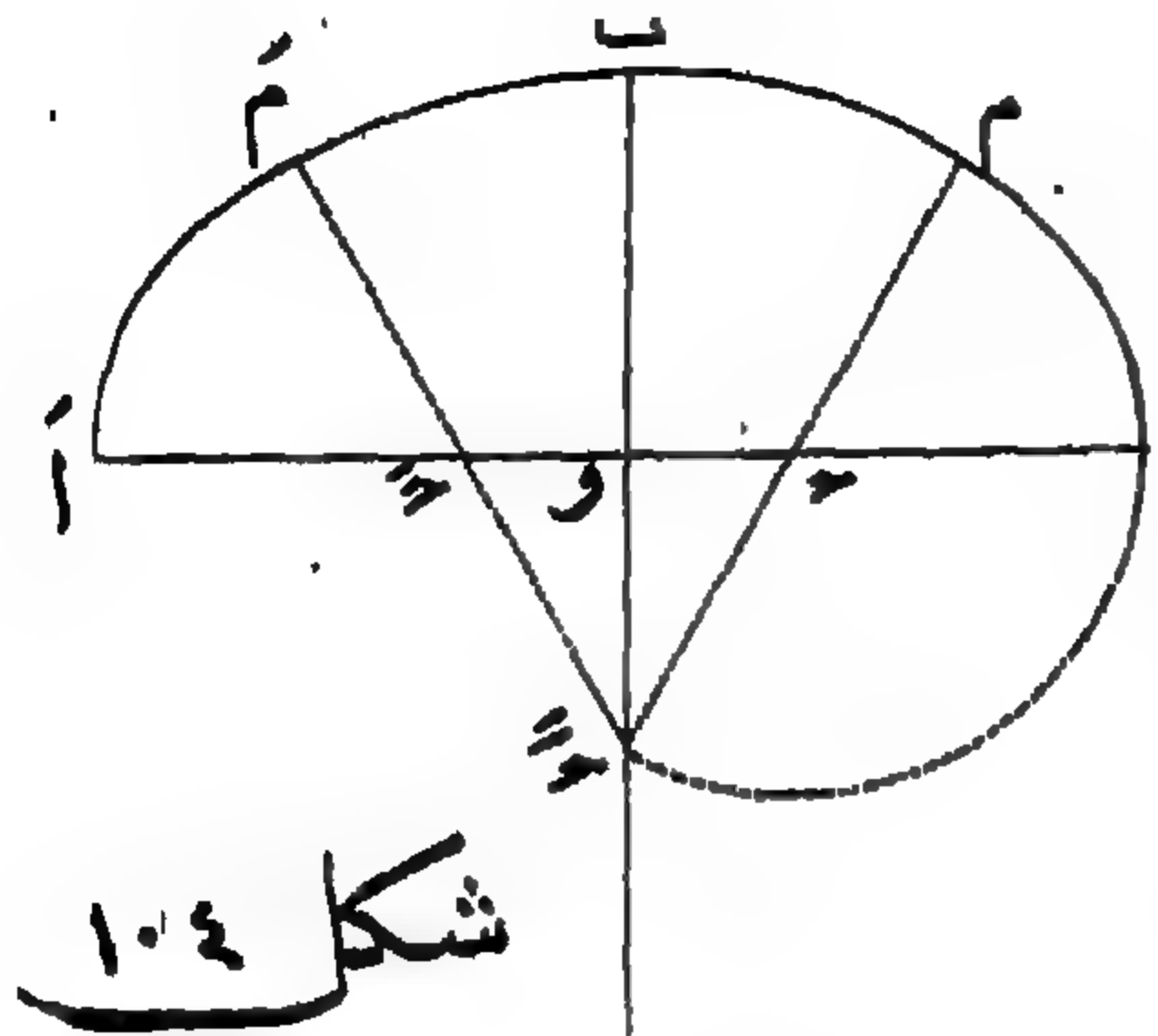
$$ب د = ح م = ح ا$$

وبناءً على ذلك يمكن تعيين نقطة د من أول الأمر بأن يؤخذ
 من ابتدأ نقطة ب بعد ب د على المحور الرأسى مستاوياً بالنصف
 القطر ح ا الذي أخذ بالاختيار ولما كان المركز ح المجهول
 متساوياً البعد عن نقطتي ح د فيمكن حينئذ تعيينه بأن
 يوصل المستقيم ح د ويقام على منتصفه عمود مثل ه ح
 ويمد حتى يتقابل مع المحور الرأسى في نقطة ح فتكون هي المركز
 الثاني المطلوب وبعد ذلك نصل منها إلى ح بمستقيم ح ح
 ونمد حتى يحدد القوس الذي رسم في مبدأ الامر غير محدود
 بنقطة مثل م ثم نجعل نقطة ح مركزاً وبنصف قطر
 مساوياً ح م أو إلى ح ب يرسم القوس م ب فيكون
 هو القوس المطلوب ويرسم النصف الثاني من المنحنى المجهول
 بمثل ما رسم هذا النصف الأول

نكتل هذه الطريقة الشائعة — هذه الطريقة تستعمل في
 حالة ما يكون المعلوم المحور الأصغر للمنحنى المرجوف فقط
 ويراد رسم ذلك المنحنى المرجوف بحيث يكون محور الثاني
 المجهول مناسباً للمحور المعلوم وإن يكون منظره وشكله
 قريبين من منظره وشكل القطع الناقص

مثلاً إذا اردت رسم المنحنى المرجوف ا م ب ح ا

شكل (١٠٤) على المحور
 أ أ المعلوم يقسم المحور المذكور
 الى ثلاثة اجزاء متساوية
 ح ح ح ح ح ح أ
 ويقام من منتصف الجزء
 المتوسط وهي نقطة و عمود
 مثل و ح على المحور أ أ
 ثم تجعل نقطة ح مركزا
 ونصف القطر ح ا يرسم



القوس ح ا الذي يقطع
 المحور الرأسى في نقطة ح التي تكون هي مركز القوس الاوسط
 من المنحنى المطلوب ونقطتا ح ح هما مركزا القوسين المتطرفين
 فنصل حينئذ من ح الى ح والى ح بمستقيمي ح ح
 ح ح الغير محدودين

ثم تجعل نقطة ح مركزا ونصف القطر ح ا يرسم القوس
 ا م ويحدد بالمستقيم ح ح م ثم تجعل نقطة ح مركزا
 ونصف القطر ح م يرسم القوس م ب م ويتم رسم
 القوس الباقى كما لمنا فظهر

الفصل الثاني

في المنحنيات المرجونية ذات الخمسة مراكز فما فوقها

س ١٦٤ د حينما يكون نصف المحور الرأسى و ب شكل (١٠٥)
 من المنحنى المرجونى أقل من ثلث الفتحة ا و ا ينبغي ان يستعمل
 لرسم ذلك المنحنى خمسة مراكز لكي لا يحصل تغييرا محسنا
 فجئى عند نقط الاتصال بل يكون تغييرا لا محسنا تدريجيا

وغير

وَمَرْمُوزًا بِضَمِّ النُّصْفِ الْمَحْوَرِ وَ أ بِحَرْفِ إِ وَلِضَمِّ الْمَحْوَرِ
الْآخِرِ وَ ب بِحَرْفِ ب لَزِمَ دَائِمًا مِرَاعَاةُ الثَّلَاثَةِ تَشْرُوطُ
الْآتِيَةِ

أَوَّلًا أَنْ يَكُونَ الْبَعْدُ وَحَرْ = ٣. و ح أَعْنَى أَنْ

نوع - ۱ = ۳ (۱ - ۲)

وثانياً أن تكون نقطة ه التي تلاقي فيها نصف القطر
مع المحور الراسي موجودة في منتصف البعد وح
أعني أن يكون

وه = $\frac{1}{4}$. وح =

وثالثاً أن تكون نقطة L التي يتلاقى فيها نصف القطر
 2 حـ بالمحور الأفقى موضوعة فى ثلث البعد وح اعنى
 أن يكون البعد $HL = \frac{1}{3} حو$

وبناءً على ذلك إذا بينا هذه الثلاثة شروط بدلالة
ثانية مجهولها بـ "بواسطة" يمكن تعيين مقدار هذا المجهول
ومن بعد معرفته يعلم بالضرورة نصف القطر من الآخران بـ "لكن بما أن هذه المقادير تكون دائماً كثيرة التركيب بحيث يصعب استعمالها قد جرت العادة بترك الحل لهذه المسئلة واستعاضه
بما سمي

سواءً وهو انه ينتخب بالاختيار نصف قطر ابتدائي مثل a و
ويؤخذ بمقتضى الشرط الاول من الثلاثة شروط المتقدمة البعد
و $d = e$ و d ونصل من نقطة e الى نقطة h وسط
البعد و d فيحدد بذلك القوس الاول am ثم يؤخذ
البعد e ل $n = p$ و e ويوصل المستقيم ل d
فيقطع e في نقطة مثل نقطة u تكون هي مركز القوس
الثاني m n ثم يوصل هذا القوس بالقوس الثالث h t

الذى

الذى يرسم بجعل نقطة Γ مركزا والبعد $\Gamma\delta$ نصف قطر

له
انما بواسطة هذه العملية لا يكون ارتفاع المضلع المساعد المتحصل
وهو البعد $\Gamma\delta$ عين الارتفاع المعلوم من راس المسئلة
لكن مع ذلك حيث كان المضلع $\Gamma\delta\epsilon$ و $\Gamma\delta\zeta$ متشابهة بالبداية
الى المضلع المجهول $\Gamma\delta\eta$ وحد $\Gamma\delta$
فاذا وضعت الرموز الآتية

$$\text{وح} = \text{س} , \text{وح} = \text{ص} , \text{وح} + \text{ح} = \text{ع} \quad \text{و}$$

$$\text{وع} = \text{هـ} , \text{وح} = \text{ك} , \text{وح} + \text{ح} = \text{ف} \quad \text{و}$$

تحصلت الارتباطات الآتية ذات الدرجة الأولى

$$\frac{\text{س}}{\text{هـ}} = \frac{\text{ص}}{\text{ك}} , \frac{\text{ع}}{\text{ف}} = \frac{\text{ح}}{\text{ك}} , \text{ع} - \text{س} = \text{ص} + \text{ب}$$

التي يستنتج منها بعد حذف ع ان

$$\text{س} = \frac{(\text{ب} - \text{ك})}{\text{هـ} + \text{ك} - \text{ف}} , \text{ص} = \frac{(\text{ب} - \text{ك})}{\text{و} + \text{ك} - \text{ف}} \quad (٤)$$

وهذه هي مقادير يسهل حسابها واجلها بالرسم لان
مقادير الخطوط و ك ف علمت من التجربة التي علمت
مقدما فضلا عن كونه معلوما ان $\text{ك} = \text{هـ} = \text{و}$ لكننا
أردنا ان نكتب قانوني تمسك (٤) هنا على صورة يمكن تطبيقها
على اى نسبة فرض وقوعها بين البعد وح ر وحد وح
ولو ان النسبة ا الى ب هي النسبة التي ظهر انهما هي الأكثر
لياقة لذلك من غيرها

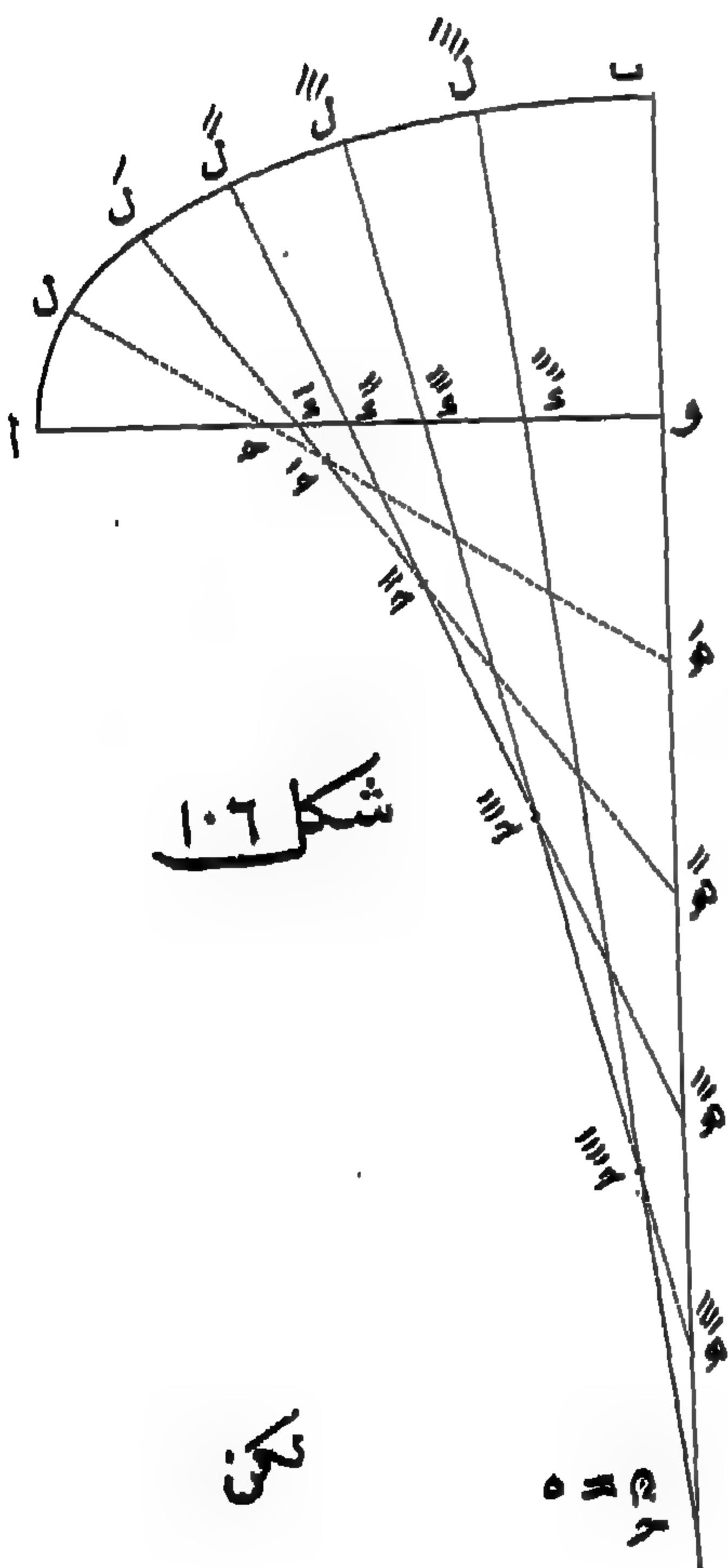
١٦٦ في المنحنى المرجو في الكثير المراكز — يمكن تطبيق الطريقة السابقة على رسم أي منحنى مرجو مركب من جملة أقواس دوائر عددها اختياريا كالعدد $1 + 2 + \dots + n$ مثلا بفرض أن n عددا خياليا اتفقت

وسيلزم لذلك أن يؤخذ كما في شكل (١٠٦) البعد $و$ متساويا على الدوام إلى ٥ و ٥ وأن يقسم البعد $و$ إلى أقسام متساوية عددها n والبعد $و$ إلى أقسام عددها n لكن بشرط أن تكون نسبة تلك الأقسام إلى بعضها كنسبة الأعداد $١, ٢, ٣, ٤, ٥, \dots, n$ إلى بعضها

فتبلا إذا فرض أن $٥ = ٢$ كان المنحنى المرجو الذي يبراد للحصول عليه مركبا من إحدى عشر قوس دائرة لأنه إذا وضع عدد (٥) بدلا عن n في الكمية $١ + ٢٥$ فكانت تساوي ١١

ولا جل تعيين مراكز وانصاف أقطار هذه الأقواس يؤخذ ابتداء نصف القطر $أ$ للقوس الأول بالإختيار ثم يؤخذ البعد $و$ $= ٥$ و ٥ ويقسم البعد $و$ إلى خمسة أقسام متساوية كما هو مبين في الشكل

وكذا يقسم البعد $و$ إلى خمسة أقسام أيضا



تكن

$٥ = ٢$

لكن بشرط ان تكون نسبة

حجۃ : عَمَّ : عَمَّ : عَمَّ : عَمَّ : عَمَّ : و :: ا :: ج :: د :: ه ::

وبعد ذلك اذا وصل من ح الى هـ ومن د الى هـ
ومن ع الى هـ والخ تكون المضلع ح ح ح ح ح ح ح ح
الذى رؤسه هي مراكز الستة أقواس المكونة لنصف
المختار

لكن حيث ان ارتفاع المنحنى المتحصل وهو OB لم يكن في جميع
الاقاات عين ارتفاع المنحنى المطلوب فيعتبر المضلع المتقدم
كمحنى تجري مساعدا ثم من بعد الرمز B في S R من
للبعد OB وح R وح الحقيقين والموافقين للمضغ الاصل
الذي ارتفاعه B يمكن الحصول ايضا على ارتباطات
مشابهة للارتباطات المقررة في S R ويستنبط منها
اخيرا المقدارين الآتيين

س = $\frac{(1-p)}{p-p}$ ، ص = ۱ س

وفي هذين الارتباطين و رمز لمجموع أضلاع المضلع
ح ح ح ح ح الذي وجدته أثناء إجراء العملية
التحضيرية

وقس على هذا في رسم ذي السبعة مراكز وذو التسعة وذو الثلاثة عشر وهكذا

٢٧٨ في المماس والعمودي للمخني المرجوف - من حيث ان
المخني المرجوف لم يكن مركبا سوى من جملة اقواس دوائر
فالمماس له او العمودي عليه في أى نقطة منه ليس هو الا
المماس والعمودي لقوس الدائرة الذى توجد عليه هذه النقطة

١٤٤
ولما كان الامر كما ذكر فهذا التاثير كاف

الباب السابع

في المنحنى المسمى بحلزون أرشميد

١٦٨ بد يطلق اسم منحنى حلزونى عموماً على كل منحنى متولد من تحرك نقطة تدور الى ما لا نهاية حول نقطة ثابتة تسمى قطباً حالة كونها آخذة في التباعد عن هذه النقطة الثابتة شيئاً فشيئاً

وهذه المنحنيات تتركب من لفئات غير متناهية واللفة هى كناية عن جزء المنحنى الذى ترسمه النقطة المتحركة في مدة دوراتها ودورة كاملة

ولاجل سهولة تصور كيفية تولد هذه المنحنيات يمكننا ان نتوهم ان النقطة الراسية للمنحنى الحلزونى تتحرك على مستقيم حالة كون هذا المستقيم يدور حول القطب وأبسط هذه المنحنيات هو المنحنى المعروف بحلزون أرشميد وهو الذى سنقتصر على ذكره هنا لكثرة لزومه واحتياجانه في الاعمال فنقول

١٦٩ بد حلزون أرشميد هو المنحنى المستوى المتولد من حركة نقطة على مستقيم تحركاً منتظماً حالة كون هذا المستقيم يتحرك هو الآخر بانتظام أيضاً حول نقطة ثابتة

ويفهم من هذا التعريف انه اذا اعتبرت نقطة ثابتة على المستقيم المتحرك غير النقطة الراسية فانها وان كانت ثابتة الوضع بالنسبة للمستقيم تتحرك معه حول القطب وترسم في أثناء حركتها محيط دائرة بحيث تكون المسافات التى تقطعها هذه النقطة على محيط الدائرة هذا مناسبة للمسافات التى تقطعها

النقط

النقطة الرأسية الأصلية على المستقيم المتحرك
ولاجل السهولة يمكننا ان نأخذ محيط دائرة نصف قطره الوحدة
وحيث فتكون النسبة الثابتة التي قلنا انها موجودة بين المسافات
المقطوعة على محيط الدائرة وعلى المستقيم المتحرك هي النسبة المخصصة
لكل حلزون عنادونه وهما تتميز الحلزونات المختلفة عن بعضها
ومن الواضح الجلي انه كلما دار نصف القطر القطبي (وهو جزء
المستقيم المتحرك المحصور بين نقطة من الحلزون والقطب)
دورة كاملة زاد طوله بمقدار ثابت بحيث ان الاجز من
انصاف اقطار البورتية المخصصة بين أي لفتين متتاليتين
من الحلزون تكون كلها متساوية ويطلق على كل واحد منها
اسم خطوة الحلزون او وتر اللف
ومتى علم وتر اللفه لحلزون مجهول او متى علمت النسبة الثابتة
الكائنة بين المسافات المقطوعة صار الحلزون معينا ومحددا
لاننا اذا رمزنا بحرف ل لوتر اللفه وبحرف ك لنسبة
المسافات كان بناء على تعريف المنحرف

$$\frac{ل}{ط} = ك$$

ولا يخفى انه من السهل تعيين احدى الكيتين ل رك من هذه
المتساوية متى علمت الأخرى وحرف ط الداخل في مقام
الطرف الاول رمز للنسبة التقريبية

مثلا في رسم حلزون ارشميد — حلزون ارشميد
يمكن رسم نقطة فنقطة بطريقة سهلة جدا غايتها ان يرسم
حول قطبه (و) شكل (١٠٧) محيط دائرة بنصف قطر حيثما
اتفق ويقسم الى عدد اختياري من الاقسام المتساوية
ولتكن اثني عشر قسما متساوية مثلا

فاذا جمعت بخط متصل كان هو اللغة الأولى من المنحنى المذكور ولتعيين نقط اللغة الثانية يؤخذ على المستقيمات المنقطة الخ بالابتداء من نقط اللغة الاولى التي تعيّنت ابعاد متساوية كل منها يساوى الى وا وتجميع اطراف هذه الابعاد بمعنى اللغة الثانية ولايجاد لفات اخرى بقدر ما يراد يعمل كما عمل في تعيين اللغة الثانية من بعد معرفة اللغة الأولى .

مثلا في الحلزونين الرفيحين - اذا رسم كما في الشكل المتقدم منحن حلزوني آخر حول نفس قطب الحلزون الاول وبوتر لغة مساوية لوتر لغة المنحنى الاول المذكور انما يختلف عنه فقط بوضع نصف القطر القطبي الابتدائي قيل لهذين الحلزونين رفيقان أو مترافقان ويستعملان كثيرا في رسم زخارف العمارة التي تعمل للزينة وتسمى اذان جمع اذن كاذني العمود اليونكي مثلا

ومن المشاهد بالسهولة ان الاجزا الخطية المنحصر ما بين حلزونين مترافقين من انصاف الاقطار القطبية تكون كلها متساوية

وفي الواقع لا بنا اذا فرضنا ان المستقيم (و ١٠) هو الوضع الابتدائي لنصف القطر البوري من الحلزون الثاني كان البعد و ب مساويا الى $\frac{1}{2}$ من الوتر وا وحيث انه لزم عند رسم الحلزون الثاني ان اخذ على نصف القطر القطبي (و ١١) بعد و ح مساويا الى $\frac{1}{2}$ من وا

وكان و ح = $\frac{1}{2}$ من وا
فيكون حينئذ ح ح = $\frac{1}{2}$ من وا

لكن كان و ب = $\frac{1}{2}$ من وا

قطر من وضعه الابتدائي الى الوضع المار بنقطة التماس
 ١٧٣ د في رسم التماس والعمودي للحزون الارشيدى
 — النظرية المتقدمة تعطى لنا الطريقة اللازمة
 لرسم التماس لحزون ارشيدى في نقطة مفروضة عليه

فلتكن مثلاً م شكل (١٠٩) هي نقطة التماس
 المعلومة ويقام من القطب مستقيم مثل و ح عمودى
 على نصف القطر البورى و م ونرسم بنصف القطر و م
 دائرة فيفهم بناء على ما تقدم انه في مدة انتقال نصف القطر
 البورى من وضعه الابتدائي لغاية ما يمر بنقطة التماس
 أى لغاية انه يأخذ الوضع و م تكون نقطة م قد
 لغت على هذه الدائرة مركزاً معلومة زائداً القوس و م
 وحينئذ يكفي ان يؤخذ البعد و ح مساوياً لطول
 هذه المسافة الكلية ويوصل المستقيم ح م فيكون
 هو التماس المطلوب ومتى علم التماس كان الحصول على
 العمودى في نقطة التماس سهلاً جداً لانه هو العمود
 المقام منها على المستقيم التماس

تنبيه — اذا لم يراد تعيين طول قوس الدائرة اللازم
 اخذ على المستقيم و ح بواسطة الطريقة الحسابية
 المبسطة مراعاة للاختصار في العمل فهناك طريقة عملية يمكن
 بها تعيين طول انفراد ذلك القوس

وهي انه يقسم القوس الذى يراد فرده الى جملة أقواس جزئية
 صغيرة جداً بحيث لا يفترق الواحد منها عن وتر فرقاً
 محسوساً وتنقل هذه الأوتار عقب بعضها بعضاً على المستقيم
 و ح وفي هذه الطريقة كلما كانت الأقواس الجزئية
 المأخوذة صغيرة جداً كلما قرب طول الانفراد المحصل
 من الحقيقة

تنبيه آخر — التماس عند [٤] يورى ان

النسبة $\frac{ط}{س}$ تصغر كلما كبرت المسافة هـ
 ويؤخذ من ذلك أن الزاوية س م ط شكل (١٠٩)
 تصغر أيضا بحيث كلما تقدمت نقطة التماس على المحزوب
 الارشميدى بالتباعد عن قطبيه قرب التماس له فيها شيئا فشيئا
 من أن يكون عموديا على نصف قطرها البورى
 ثانياً يؤخذ من النظرية المتعلقة بنحت التماس أن التماس للمحزوب
 المحزوبى في نقطة قطبيه هو نفس الوضع الابتدائى لنصف
 القطر القطبى لأن في هذه النقطة المسافة هـ معدومة
 أعني أن

هـ =

وبناء على ذلك يكون

وح =

ويمكن إثبات ذلك أيضا مباشرة بأن يعتبر نصف قطر بوى
 قريب جدا من الوضع الابتدائى فهذا النصف قطر يقطع
 المحزوب في نقطة القطب وفى نقطة ثانية قريبة جدا منه
 فيعد حينئذ قاطعا من قواطع المحزوب لكن من حيث أن هذه
 النقطة الثانية تتحد مع القطب عندما ينطبق نصف القطر
 البورى الثانى على النصف قطر الابتدائى فيصير هذا النصف
 قطر الابتدائى إذ ذاك مماسا للمحزوب في قطبيه وهو المطلوب

الباب الثامن

في بعض منحنيات مختلفة كثيرة الاستعمال

الفصل الأول

في

فَالْبَاسِطُ وَالْمَبْسُوطُ وَنَصِيفُ قَطْرِ الْأَمْحَنَاتِ

[illegible]

سین البقطة الثابتة

ونقطة التماس يكون

دائماً مساوياً إلى

المسافة التي قطعتها

نقطة التماس على المنحنى

فتلا اذا فرض ان

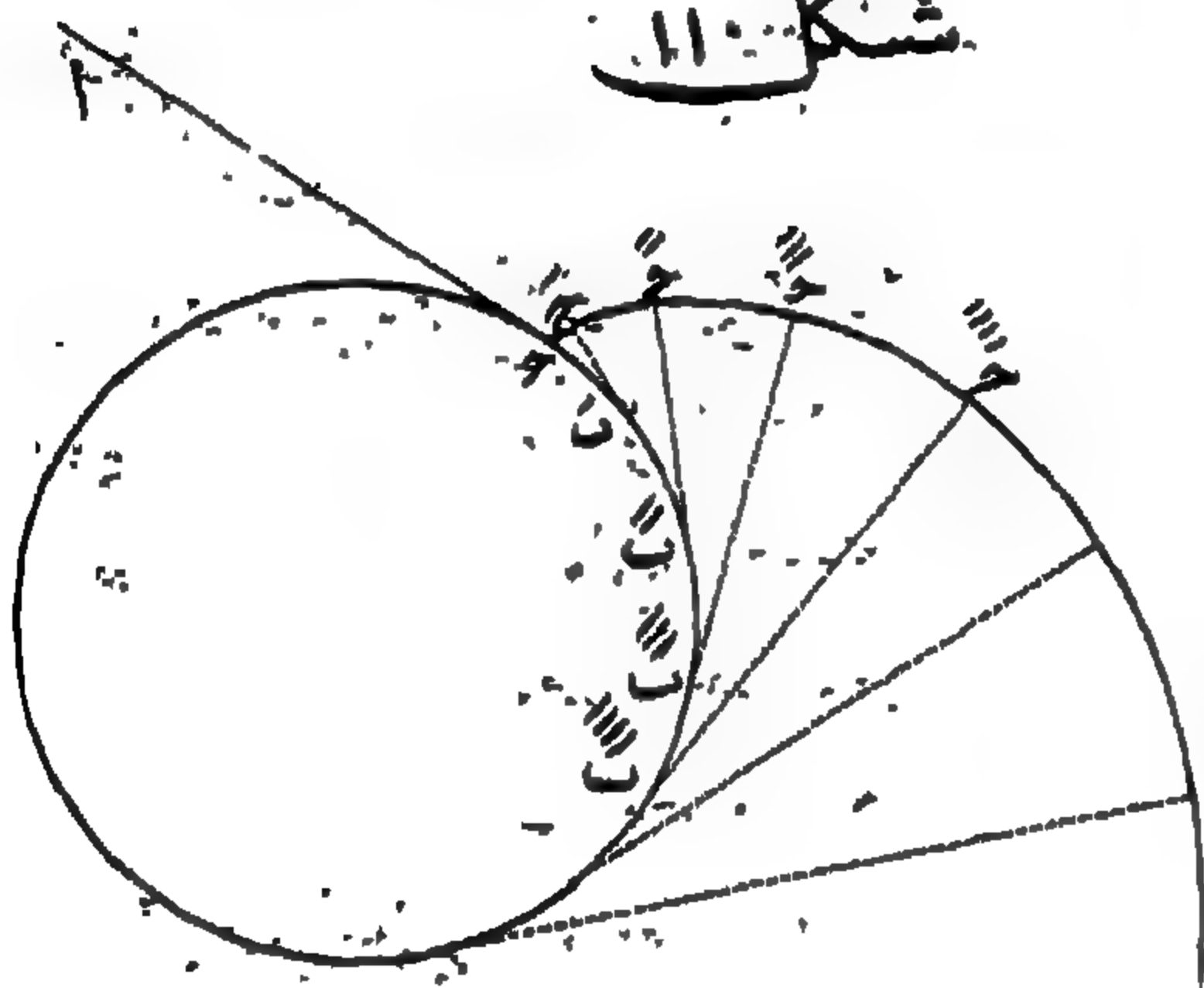
سے اچھے رشتہ داروں کو

وضاع من اوضاع

الماتر

كذلك

11-12



لَا تُدْرِكُهُ الْبَصَرُ وَلَا هِيَ تُدْرِكُ الْبَصَرَ

وَيَقَالُ لِلْيَحْيَى حَتَّى تَخْرُجَ الْمَعْرُوضُ هَذَا أَنَّهُ مَحِيطٌ بِأَشْرَقِ

[illegible]

الذي طلق عليه اسم الباسط في أول البند .
أما نقطة ح التي تتقارب فيها المسطحات مع بأسطه فإنها تسمى بنقطة

المبدأ

سنة ٧١٤ هـ في رسم باسط محيط الدائرة نقطة فنقطة — اذا فرض

الماء ثم رسم من حوافه نقاط مختلفة مثل م و ن و هـ و جـ هي نقطة

هذه حمايات المحيط الدائرة وأخذ بعد ذلك على الحمايات

أمكن اعتبار الأقواس الضعيفة $ح ت ر ت ك$... الخ
 كمستقيمات وكان $ت ح = ت ح$ ومن ذلك يمكن اعتبار
 القوس $ح ح$ كقوس دائرة مركزها $ت$ ونصف قطرها
 $ت ح$ وبفس هذا السبب يمكن أن يفرض أن $ت ح = ت ح$
 $= ت + ت$ فيرتب على ذلك إمكان اعتبار القوس
 $ح ح$ كقوس دائرة مركزه نقطة $ت$ ونصف قطره
 $ت ح = ت ح$ وهلم جرا بحيث يمكن حينئذ اعتبار الباسط
 مركزا من تتابع عدة أقواس دوائر مركزها وأنصاف أقطارها
 معينة فيمكن رسمه حينئذ بالسهولة

ومن المشاهد أن طريقة الرسم بهذه الكيفية لا يمكن أن تكون
 تامة الضبط بالكلية إلا إذا تغير مقدار نصف قطر الانحناء
 في كل نقطة من المنحنى تغييرا مستمرا

وفي الأعمال التطبيقية مع كونه يستحيل الحصول على تغير نصف
 قطر الانحناء بطريقة مستمرة بواسطة آلات الرسم الاعتيادية
 ولكن كثيرا ما تستعمل هذه الطريقة في رسم الباسط

ولاجل زيادة الضبط في رسم المنحنى بواسطة نصف قطر الانحناء
 يؤخذ البعد الأول $ح ت$ نصف الأبعاد الثلاثة له وهي

$ت ت ر ت ك$... الخ ويمد القوس المرسوم

بجعل نقطة $ت$ مركزا وبعد $ت ح$ نصف قطر لغاية

نقطة وسط القوس $ح ح$ التي نرمز لها بحرف $ح$

وكذا يمد القوس المرسوم بجعل $ت$ مركزا من ابتداء $ح$ لغاية

$ح$ التي هي وسط $ح ح$ وهلم جرا وهذه الوسطة

يرى أن كل جزء قوسي مرسوم بنصف قطر انحناء واحد يمتد بالتساوي

في جانبي الوضع المقابل لمقدار هذا النصف قطر

ولا يخفى أنه باخذ البعد $ت ت = ت ت = ت ت$... الخ

تصنع أنصاف أقطار الانحناء مع بعضها زوايا متساوية حينها

يكون المنحنى المبسوط محيط دائرة وتساوي الزوايا هذا هو

العادة الوضع الموافق ما لم ينبني على اشتراطه عدم حصول
التساوى بين ث ث ث ... الخ كما يتأتى
ذلك في حالة ما لم يكن المبسوط محيط دائرة

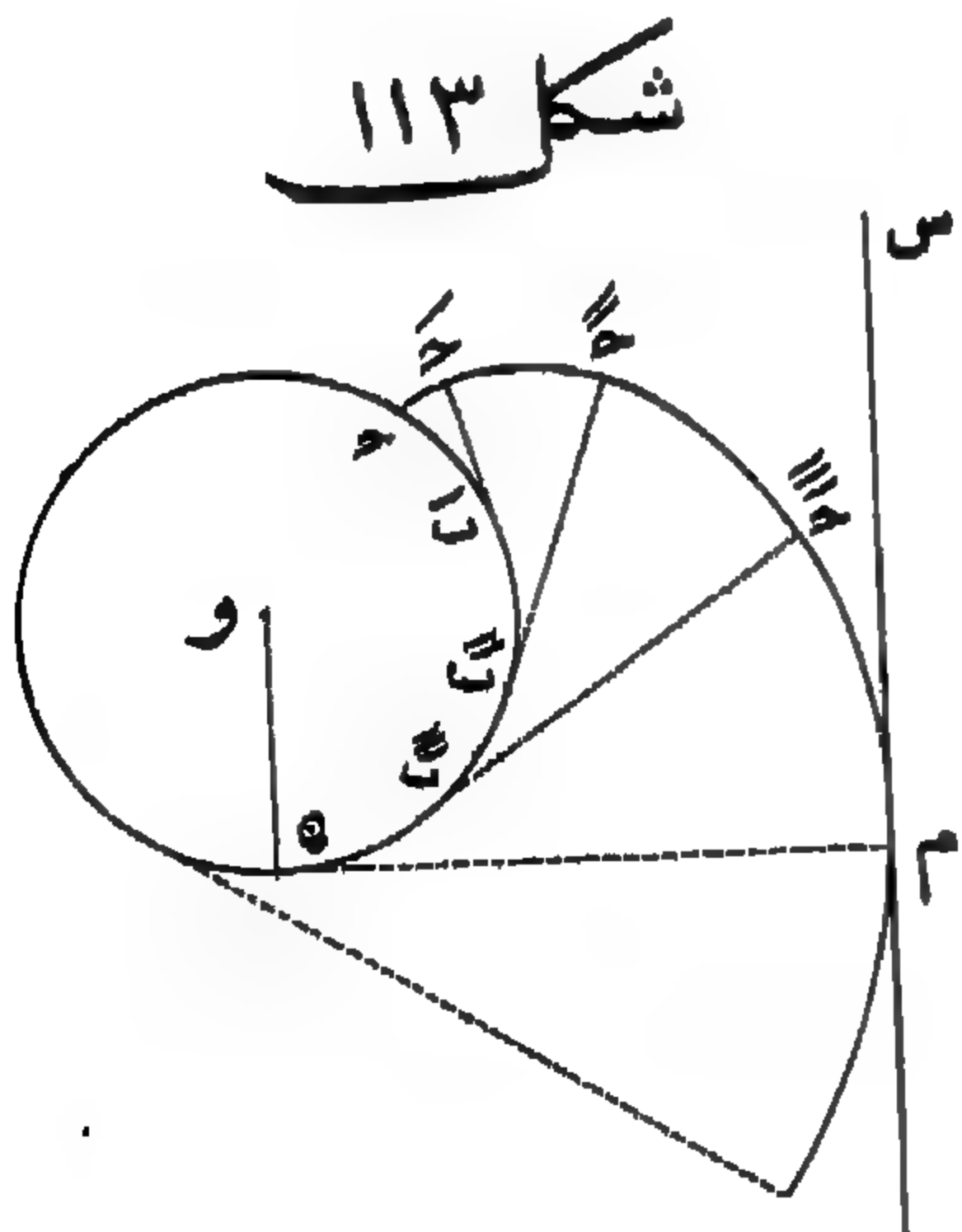
١٧٧ د في رسم الباسط بالحركة المستمرة — لنفرض ان
قتلة من الخط ملفوفة على المخني حـ شكل (١١٤)
المتقدم وانه موضوع في الطرف حـ من هذه القتلة قلم
رصا ض أو خلافة مما يستعمل للرسم فاذا حلت القتلة الملفوفة
تدريجيا مع شد ها دائما بواسطة قلم رصاص أو أى قلم اخر
موضوعا في نقطة حـ فلا شك ان هذا القلم يرسم المخني
الباسط للمخني الذي كانت القتلة ملفوفة عليه قبل حلها وهو
الذي يسمى اذ ذاك بالمخني المبسوط أو بالمبسوط فقط

ومن المشاهد ان أى نقطة أخرى من نقط القتلة ترسم عند حلها باسقاطا ثانيا متساوى البعد من جميع الجهات عن الباسط الاول بل ويكون مساويا له فى حالة ما يكون المبسوط محيط دائري

١٧٨ رسم القمودي على الباسط والمماس له —

٢ إذا رسم من أي نقطة نقطة
 ٢ شكل (١١٤) مثلاً مستقيم م م
 مماس للمبسوط كان بالضرورة
 هذا المماس عمودياً على
 الباسط في نقطة تقابله به
 وهي نقطة م وحينئذ
 إذا أقيم من تلك النقطة
 عمود مثل م س على
 م ٢ كان هذا العمود مماساً
 للباسط وهو المطلوب

ومن ذلك يرى ان كل حماس للبسوط هو محمودى على الباسط
والعكس



في النذرج ترتفع نقطة α شيئاً محدداً مخصوصاً
ثم تهبط تدريجياً إلى أن تمس المستقيم $\alpha\alpha'$ في نقطة ثانية
مثل α' وفي مدة هذه الدورة الكاملة تكون نقطة α
المتحركة رسمت في مستوى الدائرة المتدرجة منحنيًا كالمخفي
 $\alpha\beta$ هو المخفي المعروف بالسبيكلويد

سأريد والمستقيم $\alpha\alpha'$ المحصور ما بين تماسين متتاليين
مثل $\alpha\alpha'$ لنقطة واحدة مثل α يسمى قاعدة السيكلويد
 $\alpha\beta$ المرسوم بنقطة α وهذه القاعدة تساوي
محيط الدائرة الرأسية بحيث لو رسمنا بحرف ϕ لقطر هذه
الدائرة تكون القاعدة $\alpha\alpha' = \phi$
والعمود $\beta\gamma$ المار بوسط القاعدة هو محور السيكلويد
وهو يساوي إلى القطر ϕ وبناء عليه يكون

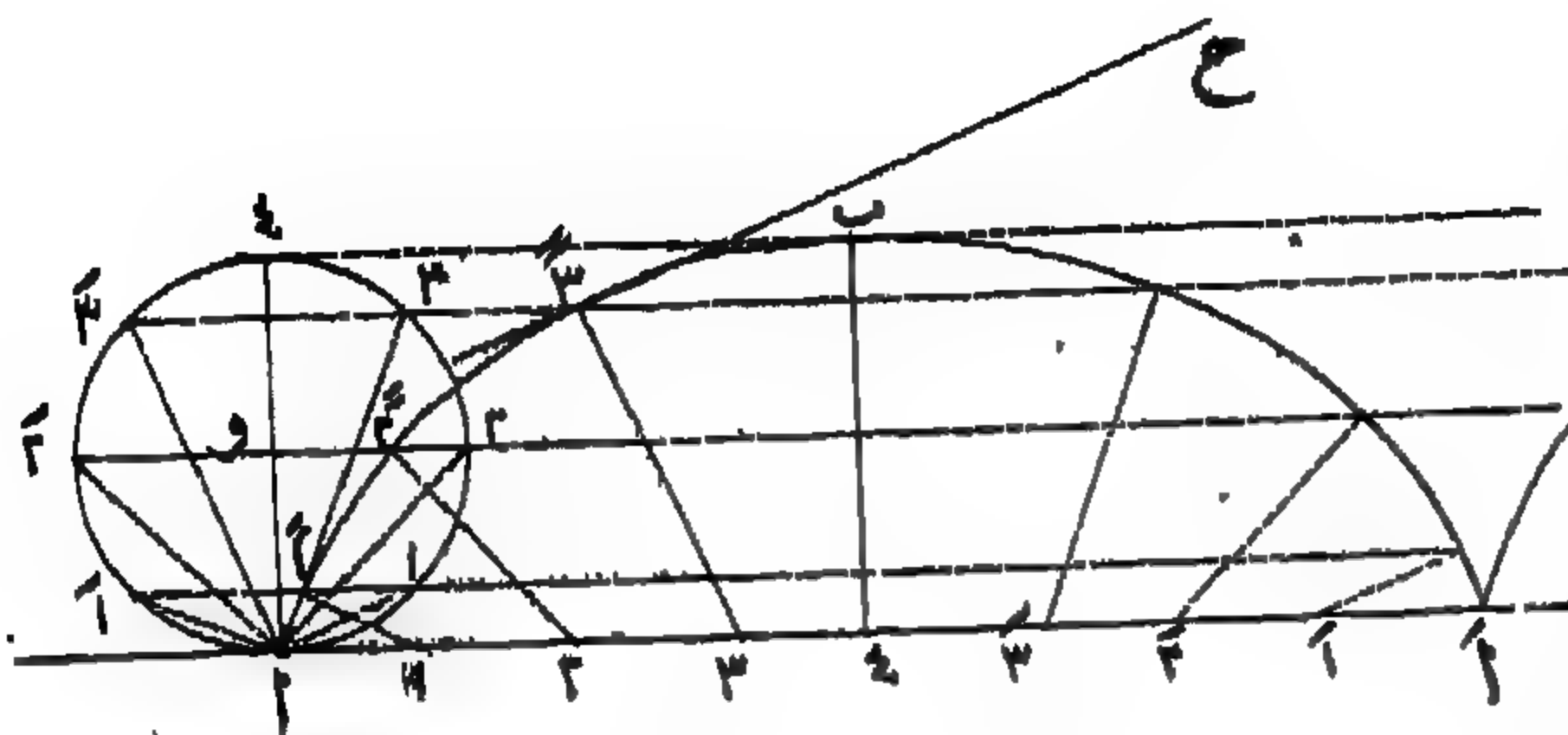
$$\frac{\alpha\alpha'}{\phi} = \frac{\phi}{\phi} = \phi = 2,1416 = \frac{22}{7} \text{ تقريباً}$$

ومن ذلك يكون

$$\alpha\alpha' = 2,1416 \times \phi = \frac{22}{7} \times \phi = \frac{22}{7} \times \frac{\alpha\alpha'}{2,1416} = \alpha\alpha'$$

سأريد رسم السبيكلويد نقطة فنقطة — إذا اردت
رسم المخفي السبيكلويد المتولد من تحرك نقطة α الكائنة
على محيط دائرة قطرها ϕ كما في شكل (١١٤) يرسم أولاً
مستقيم مثل $\alpha\alpha'$ مساوياً لقاعدة السيكلويد المقطرة
بحاصل ضرب $2,1416 \times \phi$ ثم ترسم الدائرة و
بالقطر ϕ بحيث تكون مماسة للمستقيم $\alpha\alpha'$ في نقطة
 α ثم تقسم كلا من القاعدة $\alpha\alpha'$ ومحيط الدائرة الرأسية
إلى أقسام متساوية عددها واحد كثنائية أقسام مثلاً
وتنمر بمنزلة كالمبينة في الشكل ثم يرسم من نقط تقاسيم
الدائرة

شكل ١١٤



الدائرة مستقيمت
موازية للقاعدة AA'

وبعد ذلك يرسم
من نقط تقاسيم
القاعدة وهي A

B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

مستقيمت موازية
للمستقيمت AA'

BB' CC' DD' EE' FF' GG' HH' II' JJ' KK' LL' MM' NN' OO' PP' QQ' RR' SS' TT' UU' VV' WW' XX' YY' ZZ'

الواصلة من نقطة A الى نقط تقاسيم الدائرة و فهذه
الموازيات تتقاطع مع موازيات القاعدة AA' في نقط مثل
 B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
لأننا اذا اعتبرنا أي واحدة من هذه النقط كنقطة A مثلا
نجد انه حينما نصير نقطة التماس في نقطة A من القاعدة
نصير القطر AA' رأسيا وتصير النقطة الرأسية A
شاذلة بالنسبة لهذا القطر وضعا كوضع نقطة A بالنسبة
للقطر AA' كما في الشكل وحيث ان الوضع الذي
يكون بهذه الصورة ليس هو الا نقطة A فتكون حينئذ
هذه النقطة من نقط السيكلويد

وتمثل ذلك يبرهن على ان النقط B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
من السيكلويد وحيث انه يمكن تقسيم القاعدة AA'
الى اقسام متساوية عددها حيثما اتفق فيمكن بناء على
ذلك تعيين النقط الكافية بقدر ما يراود من السيكلويد
فاذا جمعت هذه النقط بخط متصل تحصل المخطط
السيكلويدي

فاذا فرضنا ان المعلوم القاعدة AA' للسيكلويد بدل

ان كان المعلوم قطر الدائرة الراسية وهو $\frac{1}{2}$ أمكن دائما تعيين القطر المذكور هكذا

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ تقريباً}$$

وبعد تعيين القطر $\frac{1}{2}$ نجري العمل كما في الحالة المتقدمة وفي اثناء حركة الدائرة وا ترسم نقطة ا السيكلويد اب ا والمرکز و يرسم المستقيم و الموازي للقاعدة ا ا وكل نقطة من التي بين و ا ترسم سيكلويدا قصيرا اما كل نقطة موضوعة على استقامة و ا فانها ترسم سيكلويدا مستطيلا وليس في رسم هذه السيكلويدات قصيرة كانت او طويلة أدنى صعوبة

١٨٤ رسم السيكلويد بالاسطرار — اذا علمت الدائرة و على هيئة قرص مستدير وثبت على محيطها سن مدبب او قمة القلم الرصاص في نقطة ا كما في شكل (١١٤) ثم دحرج هذا القرص بطول مسطرة مطبق حرفها على ا ا لكن بدون حصول أدنى تزلزلاق من الدائرة على حرف المسطرة فان القلم الرصاص والسن المثبت في نقطة ا يرسم السيكلويد بحركة مستمر

١٨٤ رسم العمودي على السيكلويد ثم المماس له — متى شغلت النقطة الراسية للسيكلويد وهي ا وضعا حيثما اتفق كالوضع ه مثلا شكل (١١٤) المتقدم صلت نقطة الخامس هي و حينئذ فيمكن اعتبار العنصر النحوي ه من السيكلويد كانه منطبق ومتحد مع عنصر قوس الدائرة التي مركزها نقطة ه ونصف قطرها ه ه وبناء على ذلك يكون المستقيم ه ه العمودي على قوس تلك الدائرة عموديا أيضا على ممحني السيكلويد

وَيَكُونُ حِينَئِذٍ الْعَمُودُ ۚ ح ۚ الْمَقَامُ عَلَى نَهَايَةِ ۚ ۚ

مما تشاء للسبيل كل يوم

وينتج من ذلك طريقة

الرسم العمودي والمماس

للنضي السب كلويدي

في نقطة مثل نقطة م

شکل (۱۱۵) مفروضه

عليه أو على قوس من

ولذلك يكفي ان نعين نقطة

تماس الدائرة الرسمية بالفاعل حينما تمر تلك الدائرة بنقطة

وحيث ان اذار سم المستقيم هو موازيا للقاعدة ١١ للمخروط

السكوليدى المعلوم ومرتفعاً عنها بقدر نصف القطر

و للدائرة الراسية كانت جميع الاوصاع الى تسعها من هذه
الدائرة فاشارة الى كل واحد من هذه الدوائر

اللازمه في انشاء الجرحه موجوده كلها على هذا المستقيم الموارد
مكالمات ما بين النقطه الاولى والثانيه

ولما بما أنه عند ما لصهر النقطة الرأسية
يكون مركز الدائرة متباعدًا عن نقطة م

فحينئذ اذا رسم قوس دائرة بمحاذ نقطة م مركزا

وتقدم مساو الى $\frac{1}{2}$ ونصف قطر فانه يقطع المؤدى

و في نقطة مثل و تكون هي المركز المطلوب

فلو أنزلنا منها العمود وعلمى إيا لكات نقطة

هي نقطة التماس وعلى ذلك فسواء رسمت الدائرة

الرأسية أول ترسم يكون المستقيم م ع هو العمود

على السبكلويد في نقطة م والعمودي المقام على

م ع وهو م ح هو المماس له فيها

’ 1121, 11

الفصل الثالث

في المنحنى الايبسيكلويدى

١٨٥ إذا فرضنا ان الدائرة و شكل (١١٦) الرأسية تتدحرج على محيط دائرة كالدائرة ح بدل ان كانت تتدحرج على مستقيم كما في ١٨٤ فان كل نقطة من محيطها كنقطة ا مثلا ترسم في الملة التي تقضى ما بين كل تماسين متتاليين مثل ا ا' منحنيا مثل ا ب ا' يسمى المنحنى الايبسيكلويدى او الايبسيكلويد فقط وحينما تدور الدائرة و داخل الدائرة ح فان كل نقطة من محيطها ترسم ايضا ايبسيكلويدا لكنه يكون داخليا ويمكن ان يطبق عليه جميع ما سيدكر بخصوص الايبسيكلويد الخارجى

١٨٦ والقوس ا ا' من الدائرة ح المنحصر بين التماسين ا ر ا' المتتاليين نقطة الابتداء هو ما يسمى بقاعدة الايبسيكلويد وهذه القاعدة تساوى محيط الدائرة الرأسية و الذى يقدر بالكمية ط و اعنى بحاصل ضرب النسبة التقريبية ط في قطرها و

والمستقيم ح ب الواصل من المركز ح الى وسط هذه القاعدة هو محور الايبسيكلويد ويكون البعد ب = ٤ و
وعلى ذلك فكما تقدم فى السيكلويد المندرج فى شكل ١٨١ نجد ههنا ان

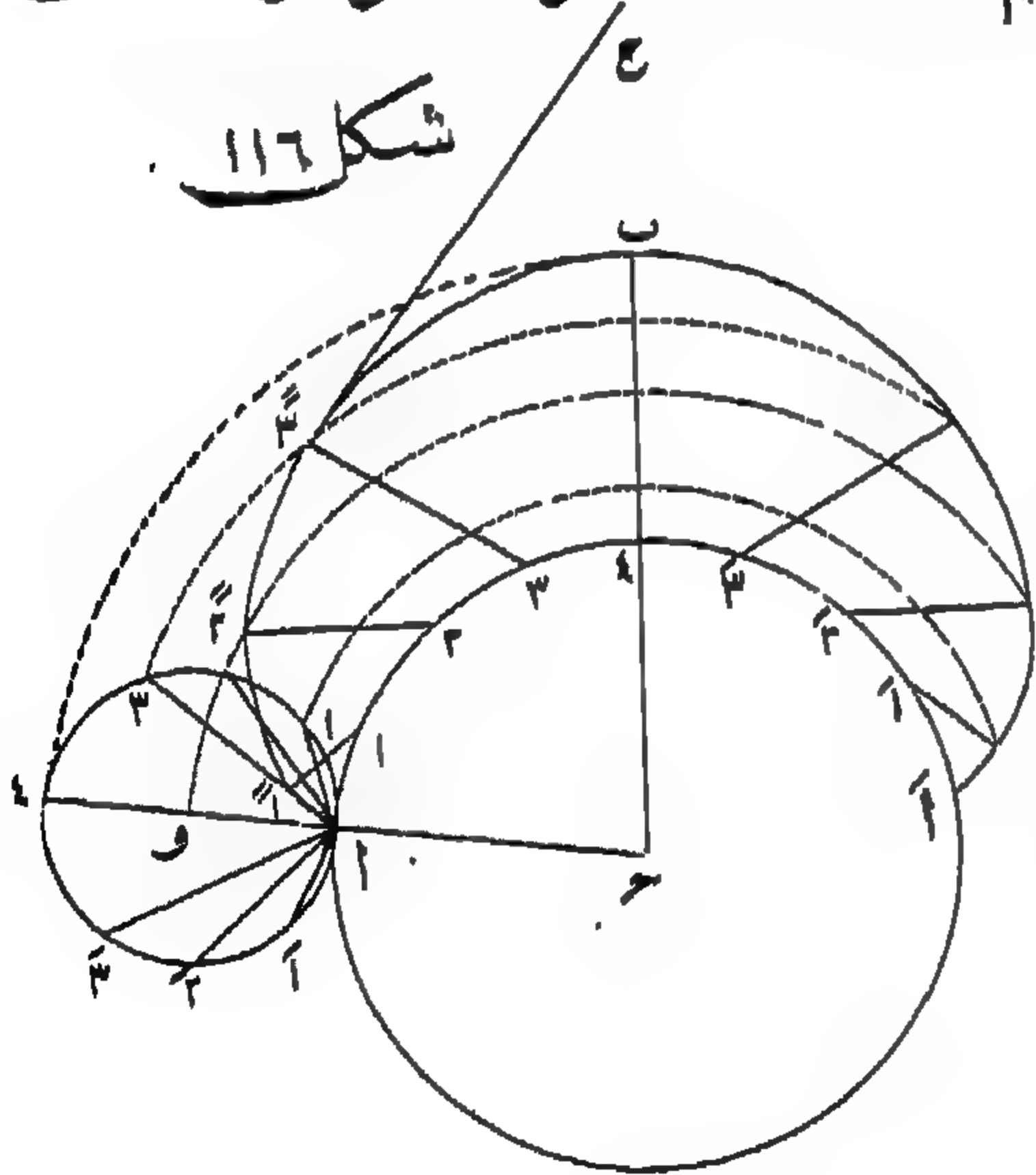
$$\frac{1}{2} = \frac{ط}{4} = ط = ١٤١٦,٤ = \frac{٤}{٧} \text{ تقريبا}$$

ومنه يحدوث

$$١١ = ١٤١٦ \times ٤ = ٥٤ = ٥٤ \div ٧ = \frac{١١}{٢٢} = \frac{٧}{٢٢} = ١١$$

ونقطة ب التي يتقابل فيها المحور مع المنحنى هي ما تسمى برأس ذلك المنحنى

١٨٧ رسم الأبيسيكلويد نقطة فنقطة —
طريقة رسم هذا المنحنى نقطة فنقطة قشابه بالكلية
لطريقة رسم السيكلويد المذكور في شكل ١٨٢ وهات
تؤخذ أولاً القاعدة $١١ = ١٤١٦ \times ٤ = ٥٤$ ويرسم
محيط الدائرة و بالقطر و المعلوم بحيث يكون
ماساً للدائرة ح في نقطة ا ثم يقسم كل من القاعدة
ا أ ومحيط الدائرة و الى عدد واحد من الأقسام
المساوية كثنائية اقسام مثلاً وتتم بالتمر الموضحة في
شكل (١١٦)



ثم تجعل نقطة ح
مركزاً وترسم جملة
دوائر متحدة المركز
مع الدائرة ح بانصاف
أقطار متساوية
للابعاد الواصلة من
نقطة ح الى نقط
تقاسيم محيط الدائرة
و وبعد ذلك تجعل
نقط تقاسيم القاعدة

ا أ وهي — ا ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١
مركزاً وترسم اقواس بانصاف اقطار متساوية

على التناظر لابعاد نقطة a عن نقط a', a'' و
 الخ التي هي تقاسيم الدائرة الراسية و
 فتقطع الدوائر الموازية الى القاعدة aa' في نقط تكون
 هي من نقط المنحنى الايبسيسكلويدى ويمكن بواسطة
 براهين مشابهة للبراهين المتقدمة في سـ ١٨٢ ان تثبت
 على ان اى نقطة من ثلاث النقط كنقطة a'' مثلاً هي
 من الايبسيسكلويد وان يمكن تعيين النقط الكافية
 لرسم ذلك المنحنى ثم تجميعها بخط فيكون هو المنحنى المطلوب
 فاذا فرض ان المعلوم هو القاعدة aa' لا القطر فـ
 يمكن تعيين هذا القطر هكذا

$$e = \frac{aa'}{6146} = \frac{v}{95} = 11$$

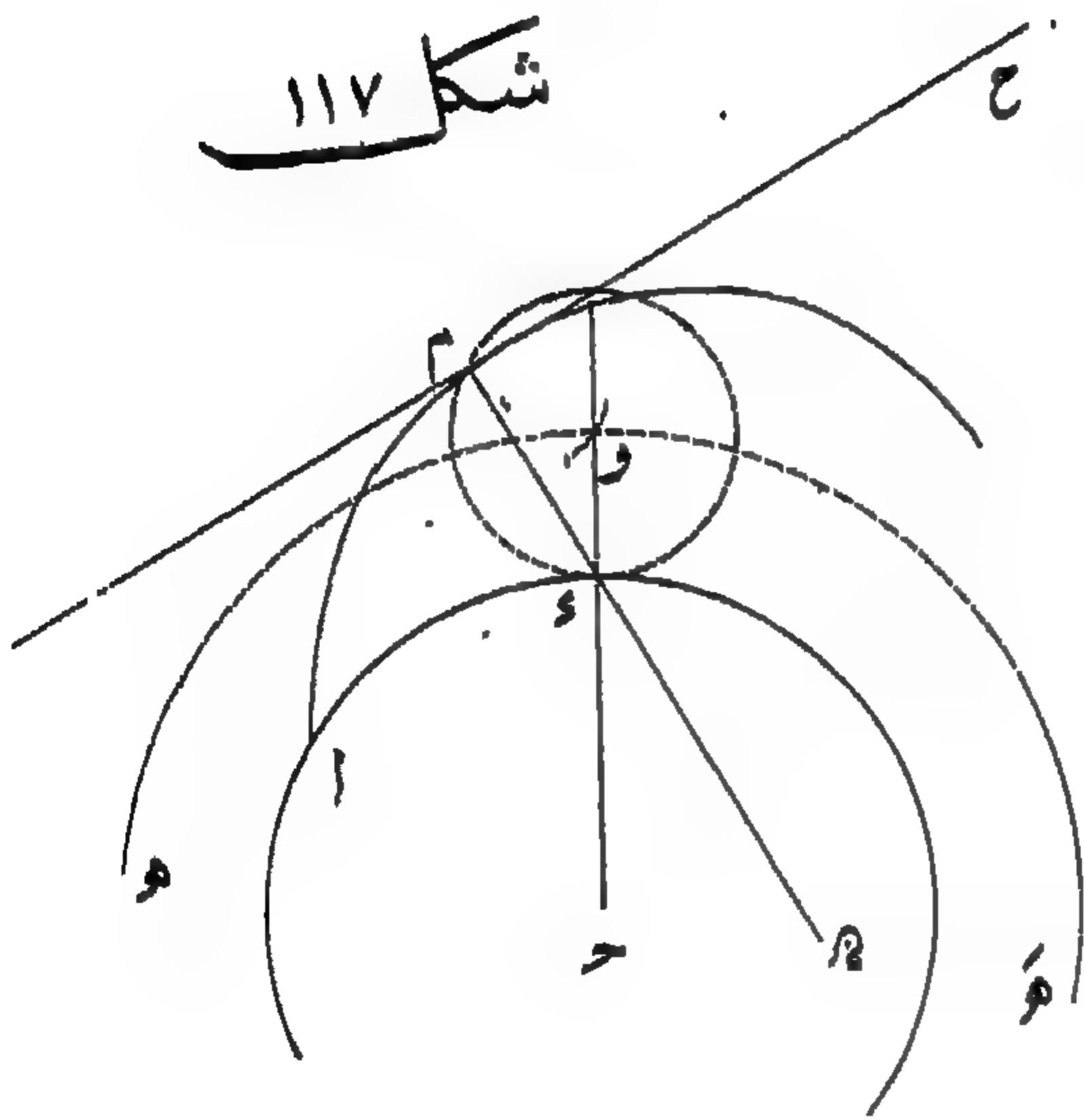
وبعد ذلك نجري العمل كما في الحالة السابقة حيث القطر
 فـ معلوماً

كل نقطة موضوعة بين نقطتي a و a' ترسم ايبسيسكلويداً
 قصيراً وكل نقطة موضوعة على استقامة البعد aa'
 المذكور ترسم ايبسيسكلويداً مستطيلاً وذلك
 كما تقدم في سـ ١٨٢

سـ ١٨٨ رسم الايبسيسكلويد بالاستمرار—
 اذا فرض ان aa' و aa'' شكل (١١٦) قرصان مستديران
 وان a سن القلم الرصاص المثبت في محيط الدائرة و
 فمن الواضح انه اذا ادير القرص و على محيط القرص حـ
 يدور انزلاقه عليه لرسم سن القلم الرصاص المنحنى
 الايبسيسكلويدى ab بـ بركة مستمرة وهو
 المطلوب

سـ ١٨٩ — رسم العمودى على الايبسيسكلويد

والماس له — يمكن بمقتضى براهين كالبراهين التي
ذكرت في ١٨٤ اثبات على ان المستقيم ϵ شكل
(١١٦) الواصل بين نقطة اختيارية مثل ϵ من
الايبسيسكلويد الى نقطة التماس ϵ للدائرة الراسمة
المقابلة لنقطة ϵ هو العمود على الايبسيسكلويد
في نقطة ϵ المذكورة



وان العمود ϵ ح
المقامر على نهاية ϵ ϵ
هو المماس للايبسيسكلويد
ومن ذلك نتج أيضا
طريقة لرسم العمود
والمماس للايبسيسكلويد
في نقطة مثل م
شكل (١١٧)
ويكفي في ذلك ان
تعين نقطة التماس
المقابلة لنقطة م

وحيث اننا لو رسمنا قوس دائرة مثل $ه ه$ موازاً لـ
١ α ومتباعد عنه بعد يساوى لنصف القطر $ه ه$ للدائرة
و الراسمة لكان القوس $ه ه$ مشتملاً على
جميع الاوضاع التي يأخذ مركز هذه الدائرة أثناء حركتها
وكذا من حيث انه عند وجود النقطة الراسمة ٢
في نقطة م يكون مركز الدائرة الراسمة متباعداً
عن نقطة م بعد يساوى $\frac{1}{2}$ $ه ه$ حينئذ
لو رسمنا قوس دائرة يجعل نقطة م مركزاً وبعد
 $\frac{1}{2}$ $ه ه$ نصف قطر لقطع $ه ه$ في نقطة و
التي هي المركز المطلوب فاذا وصل بين المراكز

و ح ب مستقيم تحصلت نقطة التماس وهي ع
 وحينئذ فسواء رسمت الدائرة و اولم ترسم يكون
 المستقيم م ع د هو العمودي المطلوب
 فاذا اقيمت المستقيم م ح عموديا عليه كان فهو
 التماس للمخني الايبيسي كلويدي في نقطة م وهو
 المطلوب

وكان تمام طبع هذا الكتاب بعون
 الملك الوهاب في غرة صفر سنة
 بعد الهجرة النبوية على صاحبها
 افضل الصلوات
 وانزعت
 التحية
 م

ESEN-CPS-BK-0000000699-ESE

00437888

